

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

**Бабенко А.Є., Боронко О.О., Грабовський А.П.,
Бабак А.М.**

ТЕОРІЯ КОЛИВАНЬ ТА СТІЙКОСТІ РУХУ

КОЛИВАЛЬНІ СИСТЕМИ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

КУРСОВИЙ ПРОЕКТ

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів, денної форми навчання,
які навчаються за спеціальністю 131 «Прикладна механіка»,
спеціалізацією «Динаміка і міцність машин» та «Інформаційні системи та
технології авіабудування»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2018

Рецензент: Крішук Микола Георгійович, доктор техн. наук, проф
Відповідальний Оніщенко Євгеній Євгенович, канд. техн. наук, доцент.
редактор

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 10 від 21.06.2018 р.)
за поданням Вченої ради Механіко-Машинобудівного Інституту (протокол № 10 від 25.05.18 р.)*

Електронне мережне навчальне видання

*Бабенко Андрій Єлисейович, доктор техн. наук, проф.,
Боронко Олег Олександрович, доктор техн. наук, проф.,
Грабовський Анатолій Павлович, кандидат техн. наук, с.н.с.,
Бабак Антон Миколайович, асистент*

ТЕОРІЯ КОЛИВАНЬ ТА СТІЙКОСТІ РУХУ

КОЛИВАЛЬНІ СИСТЕМИ З РОЗПОДІЛЕНИМИ

ПАРАМЕТРАМИ

КУРСОВИЙ ПРОЕКТ

Теорія коливань та стійкості руху: Коливальні системи з розподіленими параметрами: курсовий проект [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. денної форми навчання спеціальності 131 «Прикладна механіка», спеціалізації «Динаміка і міцність машин» та «Інформаційні системи та технології авіабудування»/ А.Є.Бабенко, О.О.Боронко, А.П.Грабовський А.М. Бабак; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 2,1 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 67 с.

В навчальному посібнику представлені приклади та завдання для виконання курсового проекту з дисципліни «Теорія коливань та стійкості руху». У даному навчальному посібнику представлені стиснуті теоретичні відомості для виконання курсового проекту. Розглянуто вільні поздовжні коливання стрижнів, з постійним та змінними перерізами, визначення власних частот і форм поздовжніх коливань стрижня постійного перерізу а також визначення власних частот і форм поздовжніх коливань стрижня за неоднорідних граничних умов конструкцій та деталей машинобудівної галузі. Посібник призначений для студентів КПІ ім. Ігоря Сікорського денної форми спеціальності 131 «Прикладна механіка» за спеціалізацією «Динаміка і міцність машин» та «Інформаційні системи та технології авіабудування», також може бути корисним для студентів інших навчальних закладах технічного спрямування.

© А.Є.Бабенко, О.О.Боронко, А.П. Грабовський, А.М. Бабак, 2018

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018

1. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ

Теорія коливань – наука про основні закони коливань і умови існування коливань та інших рухів. Перед теорією коливань стоять дві основні задачі: як малою силою викликати корисні коливання та як послабити дію шкідливих коливань.

Розповсюдження коливань у фізичному просторі називається хвилею. Механічні системи, які можуть коливатися, називаються коливними системами. Усі коливні системи є нелінійними та континуальними. Але для полегшення їх аналізу застосовують моделі: системи з одним ступенем вільності, з багатьма ступенями вільності та системи з безперервним розподіленням параметрів. Серед останніх розрізняють одновимірні моделі (стержень, балка, струна, вал та інші), двовимірні (пластина, оболонка), трьохвимірні (тверді пружні тіла, рідини, гази).

Для кожної моделі розглядаються вільні, вимушені, параметричні коливання, а також автоколивання.

Нелінійні коливання, стійкість руху розглядаються в основному для систем з одним ступенем вільності. Подальший розвиток науки та техніки, всезростаюча необхідність розв'язання нових задач машинобудування з урахуванням динамічних та випадкових навантажень не дає змоги обійтись тільки статичними детермінованими розрахунками з метою підвищення міцності та надійності машин при одночасному зменшенні їх ваги.

Дисципліна „Теорія коливань і стійкості руху” входить до циклу професійно-орієнтованих дисциплін підготовки бакалавра з дисципліни «Теорія коливань та стійкості руху» для студентів спеціальності 131-Прикладна механіка. Вона формує теоретичні та практичні знання студентів для раціонального проектування елементів машин, оцінки напружено-деформованого стану та правильної оцінки ресурсу. Вивчення дисципліни базується на знаннях студентів, які вони отримали під час опанування курсів вищої математики, теоретичної механіки та опору матеріалів. Знання з даної дисципліни студенти використовують під час вивчення таких курсів як „Механотроніка”, „Міцність при змінних навантаженнях”, „Статистична динаміка та надійність”, „Міцність та руйнування елементів конструкцій”.

КОЛИВАЛЬНІ СИСТЕМИ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

ВСТУП

Реальні коливальні системи мають неперервне розподілення фізичних параметрів: жорсткості, маси і характеристик демпфірування. Для таких систем закон коливального руху визначається функціями кількох змінних (часу і просторових координат), а диференціальні рівняння коливань є рівняннями з частинними похідними.

Моделі систем з розподіленими параметрами (континуальні системи) поділяють на три групи: одновимірні (один вимір – одна просторова координата і час), двовимірні (дві просторові координати і час), тривимірні (три просторові координати і час).

До одновимірних належать такі розрахункові моделі: стрижень, балка, струна; до двовимірних – пластина, оболонка; до тривимірних – пружне тіло, рідина, газ.

Коливання ізотропного пружного тіла визначається відомим з теорії пружності матричним рівнянням Ляме:

$$\mu \Delta \{u\} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \{u\} + \{X\} = \rho \left\{ \ddot{u} \right\}, \quad (1.1)$$

якому відповідають три скалярні рівняння:

$$\mu \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k^2} + (\lambda + \mu) \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_k} + X_j = \rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}, \quad (1.2)$$

де $j, k = 1, 2, 3$, а параметри Ляме дорівнюють :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.3)$$

До рівнянь (1.1) чи (1.2) потрібно приєднати граничні умови.

З рівнянь коливань тривимірного тіла теоретично можна знайти як частинні випадки рівняння коливань двовимірної та одновимірної моделей. Наприклад, вважаючи, що в (1.2) $u_1 = u_1(x_1, t); u_2 = u_3 = 0$, матимемо:

$$\mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + X_1 = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} . \quad (1.4)$$

Якщо врахувати, що $\lambda + 2\mu = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{2E}{2(1+\nu)} \approx E$, то з (1.4) дістанемо відоме рівняння поздовжніх коливань пружного стрижня (якщо знехтувати доданком з ν^2)

$$\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - E \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} = X_1 . \quad (1.5)$$

Проте в окремих випадках рівняння коливань можна отримати простіше не з (1.1), а за допомогою кінематичних гіпотез (плоских перерізів, прямих нормалей тощо). Останній підхід і використовується в цій роботі. Недоліком наведених тут рівнянь коливань, які відповідають класичній теорії пружності, є відсутність розв'язків їх при резонансі.

Ці розв'язки можна дістати тільки врахувавши внутрішнє чи зовнішнє тертя. Внутрішнє тертя в лінійному випадку стаціонарних і нестаціонарних коливань можна врахувати за гіпотезами Бока – Шліппе – Колара чи Кельвіна – Фойхта. При стаціонарних коливаннях для врахування внутрішнього тертя застосовують метод комплексних модулів пружності (гіпотеза Сорокіна).

Для врахування внутрішнього тертя за згаданими гіпотезами потрібно помножити модулі пружності на відповідні оператори. Так, за першою гіпотезою цими операторами є вирази в круглих дужках

$$E \rightarrow E \left(1 + \alpha_1 [I] \frac{\partial}{\partial t} \right); \quad G \rightarrow G \left(1 + \gamma_1 [I] \frac{\partial}{\partial t} \right), \quad (1.6)$$

де α_1 і γ_1 - коефіцієнти циклічного (несинфазного, гістерезисного) відхилення у випадку частотно – незалежного розсіяння енергії відповідно при нормальних і дотичних напруженнях; $[I]$ - матриця корегувальних множників.

Для спрощення вважаємо $\alpha_1 = \gamma_1$.

При цьому припущенні для врахування внутрішнього тертя за першою гіпотезою потрібно параметри Ламе помножити на оператор

$$\left(1 + \alpha_1 [I] \frac{\partial}{\partial t}\right). \quad (1.7)$$

Тоді рівняння (1.1) не змінить форми, якщо вважати утворені так добутки узагальненими (комплексними) параметрами Ламе. В цьому полягає принцип відповідності рівнянь теорії пружності без тертя рівнянням теорії пружності з урахуванням тертя. Тут гістерезисний коефіцієнт дорівнює:

$$\alpha_1 = \Lambda \pi^{-1}, \quad (1.8)$$

де Λ - логарифмічний декремент коливань, який не залежить від частоти і форми коливань.

При врахуванні тертя за другою гіпотезою параметри Ламе в рівнянні (1.1) потрібно помножити на оператор

$$\left(1 + b_1 [I] \frac{\partial}{\partial t}\right), \quad (1.9)$$

де $b_1 = \Lambda_1 \pi^{-1} \omega^{-1} = \dots = \Lambda_N \pi^{-1} \omega_N^{-1}$.

Тут логарифмічний декремент коливань залежить від частоти і власної форми коливань. Принцип відповідності рівнянь дотримано.

Якщо переміщення $\{u\}$ і $\{X\}$ подати в комплексному вигляді, то, згідно з гіпотезою Є.С. Сорокіна, оператором зсуву фази є уявна одиниця i . За гіпотезою Кельвіна – Фохта недосконалій пружності матеріалу приписується в'язка природа, і роль оператора зсуву відіграє оператор диференціювання за часом $\frac{\partial}{\partial t}$. Застосування останньої гіпотези коректне як для стаціонарних, так і нестаціонарних коливань не зважаючи на те, що для металічних матеріалів вона не підтверджується експериментально. Лінійна гіпотеза Сорокіна узгоджується з експериментом, але може використовуватись тільки для усталених коливань. Нехтування будь-яким з них порушує принцип суперпозицій. Крім того, деякі частинні розв'язки визначають коливання, які з'явилися до прикладання навантаження і не задовольняють принципу причинності (фізичної реалізованості).

Якщо перед оператором зсуву і поставити два знаки $(\pm i)$, то з чотирьох відповідних розв'язків можна вибрати два необхідних і формально задовольнити принцип причинності. Але два знаки перед i свідчать про порушення лінійності рівняння.

Якщо помножити параметри Ляме λ, μ в рівнянні (1.9) на оператор (1.7) або (9.9), то відповідні рівняння можна записати в операторному вигляді

$$A\{\ddot{u}\} + B\{\dot{u}\} + C\{u\} = \{X\}, \quad (1.10)$$

де A, C, B – матричні оператори: інерційний і пружний однакові для обох гіпотез $A = \rho$; $C = -\mu\Delta - (\lambda + \mu)\text{grad div}$, а дисипативний має різний вигляд $B = \alpha_1[I]$ для гіпотези Бока – Шліппе – Колара і $B = b_1C$ для гіпотези Кельвіна – Фойхта; α_1 і b_1 – відповідні цим гіпотезам коефіцієнти гістерезисного відхилення від закону Гука. Операторна форма рівнянь використовується для скорочення викладок.

1.1. Поздовжні коливання стрижнів

Стрижнем називається одновимірне пружне тіло, яке має скінченну жорсткість на розтягнення – стиснення, кручення і згинання. Стрижень, який працює на розтягнення, кручення або згинання називається відповідно брусом, валом або балкою.

1.2 Виведення диференціального рівняння поздовжніх коливань стрижня змінного перерізу з прямою віссю

Вважаємо, що при поздовжніх коливаннях справедлива гіпотеза плоских перерізів; задача при малих переміщеннях є фізично і геометрично лінійною, всіма компонентами напружень і деформацій, окрім $\sigma_{11} = \sigma$, $\varepsilon_{11} = \varepsilon$, можна знехтувати. В цьому випадку переміщення і деформація дорівнюють $u_1 = u(x, t)$; $u_2 = u_3 = 0$ і $\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$. Цій деформації за законом Гука, за гіпотезами Кельвіна – Фохта або Бока – Шліппе – Колара відповідають напруження

$$\sigma = E \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \sigma = E \left(1 + b_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial x}; \quad \sigma = E \left(1 + \alpha_1 [I] \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Значення поздовжньої сили в поперечному перерізі (рис. 1.2.1) визначається відповідно до цих фізичних законів формулами:

$$N(x) = EF(x) \frac{\partial u}{\partial x}; \quad (1.2.1)$$

$$N(x) = EF(x) \left(1 + b_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial u}{\partial x}; \quad (1.2.2)$$

$$N(x) = EF(x) \left(1 + \alpha_1 [I] \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (1.2.3)$$

Додаючи, згідно з принципом Д'аламбера, до зусиль, які діють на елемент стрижня dx , сили інерції - $\rho F \ddot{u} dx$ і сили в'язкого тертя середовища - $b_2 F \dot{u} dx$ (або сили частотно-незалежного тертя середовища - $\alpha_1 [I] \rho F \dot{u} dx$) (рис. 1.2.1), дістанемо умову його динамічної рівноваги:

$$N + \frac{\partial N}{\partial x} dx + q(x, t) dx = N + \rho F \ddot{u} dx + b_2 \rho F \dot{u} dx,$$

врахувавши формули (1.11) - (1.14), знайдемо наближенні (справедливі для малих частот, коли довжина хвилі деформації більша, ніж розміри поперечного перерізу) рівняння вимушених поздовжніх коливань відповідно пружного стрижня, стрижнів з в'язким і частотно-незалежним внутрішнім тертям (недосконалою пружністю) та зовнішнім тертям,

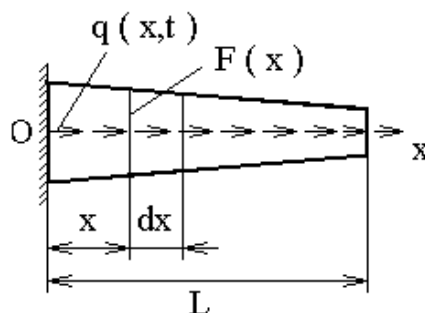


Рис. 1.2.1 Розрахункова схема стрижня при поздовжніх коливаннях

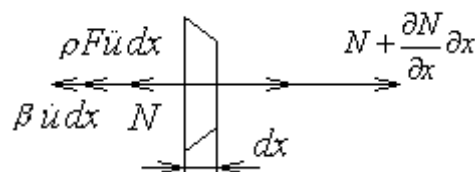


Рис. 1.2.2 Схема зусиль

відповідно пружного стрижня, стрижнів з в'язким і частотно-незалежним внутрішнім тертям (недосконалою пружністю матеріалу) та зовнішнім тертям:

$$\rho F \ddot{u} + b_2 \rho F \dot{u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(EF \frac{\partial u}{\partial x} \right) = q(x, t); \quad (1.2.4)$$

$$\rho F \ddot{u} + b_2 \rho F \dot{u} - \frac{\partial}{\partial x} \left[EF \left(1 + b_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial u}{\partial x} \right] = q(x, t); \quad (1.2.5)$$

$$\rho F \ddot{u} + b_2 \rho F \dot{u} - \frac{\partial}{\partial x} \left[EF \left(1 + \alpha_1 [I] \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial u}{\partial x} \right] = q(x, t); \quad (1.2.6)$$

де ρ — щільність; E — модуль поздовжньої пружності; F — площа поперечного перерізу; b_1, α_1 — коефіцієнти гістерезисного відхилення від закону Гука у випадках частотно-залежного і частотно-незалежного розсіювання енергії в матеріалі; b_2, α_2 — коефіцієнти пропорційності оператора B оператору A , що відповідають частотно-залежному і частотно-незалежному зовнішньому тертю; $[I]$ — нескінченна матриця корегувальних множників.

Якщо переміщення і змущувальну силу записати в комплексному вигляді, то оператором зсуву фази на 0,5 може бути уявна одиниця i . Однак тоді відповідне рівняння (1.17) буде коректним тільки при дослідженні усталених коливань. Зіставляючи рівняння (1.16), (1.17) з рівнянням (1.15) приходимо до висновку, що для врахування недосконалої пружності матеріалу потрібно помножити модуль пружності його на оператор відповідної лінійної гіпотези розсіювання енергії в матеріалі. Таким оператором у гіпотезі Кельвіна – Фохта є $1 + b_1 \frac{\partial}{\partial t}$, у гіпотезі Бока – Шліппе – Колара – $1 + \alpha_1 [I] \frac{\partial}{\partial t}$, у гіпотезі Сорокіна – $1 + \alpha_1 i$ тощо.

Рівняння (1.15)—(1.17) можна замінити одним операторним рівнянням

$$A\ddot{u} + B\dot{u} + Cu = q; \quad (1.2.7)$$

де інерційний і пружний оператори мають однакові вирази для всіх трьох рівнянь

$$A = \rho F; \quad C = -\frac{\partial}{\partial x} \left(EF \frac{\partial}{\partial x} \right), \quad (1.2.8)$$

дисипативний оператор різний для всіх рівнянь

$$B = b_2 \rho F = b_2 A; \quad B = b_1 C + b_2 A;$$

$$B = \alpha_1 [I] C + \alpha_2 [I] A.$$

1.3 Вільні поздовжні коливання стрижня змінного перерізу

Вважаємо, що в (1.15) $b_2 = 0$ і $q = 0$, тоді маємо рівняння вільних коливань стрижня без урахування тертя

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(EF \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \rho F \ddot{u} = 0, \quad (1.3.1)$$

Для повного розв'язку рівняння — розв'язку задачі про вільні коливання стрижня потрібно до рівняння (1.3.1) приєднати дві граничні умови і дві початкові умови.

Відомі дві однорідні граничні умови: на вільному кінці осьова сила $N = EF \frac{\partial u}{\partial x} = 0$, якщо там немає зосередженого навантаження, на закріпленому кінці переміщення $u = 0$. Можливі три комбінації однорідних граничних умов: обидва кінці вільні; обидва кінці закріплені; один кінець закріплений, другий вільний.

Частинні розв'язки рівняння (1.3.1) шукаємо у вигляді:

$$u_l(x, t) = U_l(x) \eta_l(t) = U_l(x) \cos(\omega_l t - \varphi_l), \quad (1.3.2)$$

що відповідає головним коливанням. Підставимо (1.3.2) в (1.3.1), дістанемо рівняння для власних форм коливань

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(EF \frac{\partial U_l}{\partial x} \right) + \rho F \omega_l^2 U_l = 0. \quad (1.3.3)$$

Замкнена форма розв'язку цього рівняння відома тільки при деяких законах зміни перерізу вздовж стрижня. Незважаючи на це, відомо, що:

1) існує впорядкований дискретний спектр власних частот і відповідна множина власних форм коливань

$$\omega_1 \leq \omega_2 \leq \omega_3 \dots U_1(x); U_2(x); U_3(x); \dots ;$$

2) усі власні частоти дійсні, додатні, якщо оператор $A > 0$, а C^{-1} цілком неперервний;

3) власні форми коливань попарно ортогональні відносно кінетичної і потенціальної енергій

$$(AU_l, U_s) = 0 \quad (CU_l, U_s) = 0; \quad l \neq s; \quad (1.3.4)$$

4) власні форми коливань утворюють повний базис.

Доведемо третє твердження, записавши рівняння (1.3.4) для U_l і U_s . Помножимо перше з отриманих рівнянь на $U_s dx$, а друге — на $U_l dx$ і проінтегруємо вздовж стрижня

$$\int_0^L \frac{d}{dx} \left(EF \frac{dU_l}{dx} \right) U_s dx = -\omega_l^2 \int_0^L \rho F U_l U_s dx, \quad (1.3.5)$$

$$\int_0^L \frac{d}{dx} \left(EF \frac{dU_s}{dx} \right) U_l dx = -\omega_s^2 \int_0^L \rho F U_s U_l dx. \quad (1.3.6)$$

Тут ліві частини проінтегруємо частинами

$$EF \frac{dU_l}{dx} U_s \Big|_0^L - \int_0^L EF \frac{dU_l}{dx} \frac{dU_s}{dx} dx = -\omega_l^2 \int_0^L \rho F U_l U_s dx; \quad (1.3.7)$$

$$EF \frac{dU_s}{dx} U_l \Big|_0^L - \int_0^L EF \frac{dU_s}{dx} \frac{dU_l}{dx} dx = -\omega_s^2 \int_0^L \rho F U_s U_l dx. \quad (1.3.8)$$

У випадку однорідних граничних умов перші доданки в рівняннях (1.3.7), (1.3.8) дорівнюють нулю. Віднімемо один від одного вирази, що залишилися, враховуючи самоспряженість операторів A і C . Дістанемо

$$\int_0^L \rho F U_l U_s dx = \begin{cases} 0 & \text{при } s \neq l \\ M_l & \text{при } s = l \end{cases}. \quad (1.3.9)$$

Врахувавши (1.3.7), з (1.3.8) дістанемо і другу умову ортогональності та формулу для головного коефіцієнта жорсткості

$$-\int_0^L \frac{d}{dx} \left(EF \frac{dU_l}{dx} \right) U_s dx = \int_0^L EF \frac{dU_l}{dx} \frac{dU_s}{dx} dx = \begin{cases} 0; & \text{при } s \neq l \\ K_l; & \text{при } s = l \end{cases}, \quad (1.3.10)$$

а також формулу для l -ї власної частоти

$$\omega_l^2 = \frac{K_l}{M_l} . \quad (1.3.11)$$

Власні форми коливань визначаються з точністю до сталого множника. Для ліквідування такої довільності їх нормують, підпорядковуючи одній з рівностей

$$M_l = 1; \quad K_l = 1; \quad U_l(x_0) = 1. \quad (1.3.12)$$

1.4 Вільні поздовжні коливання стрижня постійного перерізу

Якщо коефіцієнти рівняння (1.3.1) EF і ρF сталі, то рівняння спрощується і називається *хвильовим*, набуваючи вигляду:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (1.4.1)$$

де $c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ — фазова швидкість (швидкість поширення поздовжньої хвилі в стрижні, швидкість звуку в стрижні), mc^{-1} .

Три можливі комбінації однорідних граничних умов у випадках, коли обидва кінці вільні, обидва кінці закріплені або один закріплений, другий вільний, мають відповідно такий вигляд:

$$EF \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = EF \frac{\partial u(L, t)}{\partial x} = 0; \quad (1.4.2)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0; \quad (1.4.3)$$

$$u(0, t) = EF \frac{\partial u(L, t)}{\partial x} = 0. \quad (1.4.4)$$

Хвильове рівняння (1.4.1) можна розв'язати точно методами *стоячих хвиль* (метод Фур'є) і *біжучих хвиль* (метод Д'Аламбера).

Згідно з першим методом частинні розв'язки хвильового рівняння знаходимо у вигляді, що відповідає головним (гармонічним) коливанням:

$$U_l(x, t) = U_l(x)\eta_l(t) = U_l(x)\alpha_l \cos(\omega_l t - \varphi_l), \quad (1.4.5)$$

де $U_l(x)$ — l -а власна форма коливань (амплітудна функція); $\eta_l(t)$ — l -а головна координата.

Такий варіант методу Фур'є називають *методом головних коливань* (координат) — (МГК). Підставимо (1.36) в (1.32) і дійдемо звичайного диференціального рівняння

$$\frac{\partial^2 U_l}{\partial x^2} + k_l^2 U_l = 0, \quad (1.4.6)$$

в якому хвильове число

$$k_l = \frac{\omega_l}{c_0} = \omega_l \sqrt{\frac{\rho}{E}}. \quad (1.4.8)$$

Дві граничні умови дають змогу визначити в загальному розв'язку рівняння (1.4.6):

$$U_l = A_l \cos k_l x + B_l \sin k_l x \quad (1.4.9)$$

значення тільки однієї сталої та характеристичного числа (хвильового), значення другої сталої вибирається довільно.

Суперпозиція частинних розв'язків (1.4.5) є загальним розв'язком вихідного рівняння (1.4.2):

$$U(x, t) = \sum_{l=1}^{\infty} a_l U_l(x) \cos(\omega_l t - \varphi_l) = \sum_{l=1}^{\infty} U_l(x) (N_l \cos \omega_l t + Q_l \sin \omega_l t). \quad (1.40)$$

Коливання тут уже не будуть гармонічними. Сталі a_l і φ_l (амплітуда і початкова фаза головного коливання) та сталі N_l , Q_l пов'язані між собою

$$N_l = a_l \cos \varphi_l; \quad Q_l = a_l \sin \varphi_l; \quad a_l^2 = N_l^2 + Q_l^2; \quad \operatorname{tg} \varphi_l = \frac{Q_l}{N_l}, \quad (1.4.11)$$

і визначаються з двох початкових умов

$$u(x, 0) = u_0(x); \quad \dot{u}(x, 0) = \dot{u}_0(x) \quad (1.4.12)$$

за допомогою умов ортогональності та формул зведення, які у випадку стрижня постійного перерізу мають вигляд

$$\rho F \int_0^L U_l U_s dx = \begin{cases} 0 & \text{при } s \neq l \\ M_l & \text{при } s = l \end{cases}; \quad (1.4.13)$$

$$-EF \int_0^L \frac{d^2 U_l}{dx^2} U_s dx = EF \int_0^L \frac{dU_l}{dx} \frac{dU_s}{dx} dx = \begin{cases} 0 & \text{при } s \neq l \\ K_l & \text{при } s = l \end{cases}. \quad (1.4.14)$$

Умови ортогональності тут можна записати в чистому вигляді без математичної ваги, поділивши рівності (1.4.13 та 1.4.14) відповідно на ρF і EF .

1.5 Визначення власних частот і форм позовжніх коливань стрижня постійного перерізу

Випадок 1. Стрижень з вільними для позовжніх переміщень кінцями (рис. 1.5.1) а). Враховуючи форму розв'язку (1.4.9) і умови (1.4.2.), запишемо граничні умови для l -ї власної форми коливань (1.4.9) так:

$$\frac{dU_l(0)}{dx} = \frac{dU_l(L)}{dx} = 0 \quad (1.5.1)$$

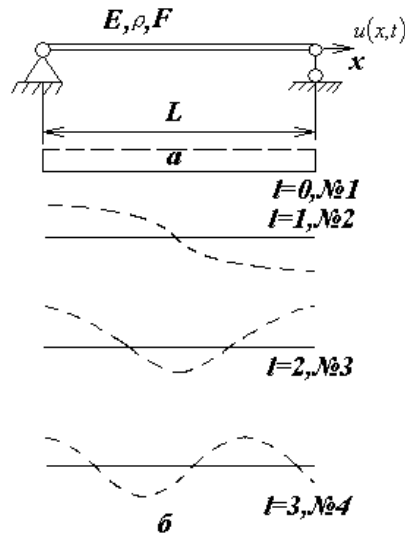


Рис. 1.5.1 Стрижень з вільними для позовжніх переміщень кінцями (а) і його перші власні форми позовжніх коливань (б)

Підставимо (1.4.9) в (1.5.1): знаходимо $B_l = 0$ A_l . Оскільки $A_l \neq 0$, то

$$\sin k_l L = 0 \quad (1.5.2)$$

Корені частотного рівняння (1.5.1) і хвильові числа відповідно дорівнюють:

$$k_l L = 0, \pi, 2\pi, \dots, l\pi, \dots,$$

$$k_l = \frac{l\pi}{L}; \quad l = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (1.5.3)$$

Тоді відповідно до (1.4.8) знаходимо власні кутові частоти — частоти повних коливань

$$\omega_l = k_l c_0 = \frac{l\pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (1.5.4)$$

Усі власні частоти кратні основній (найменшій) частоті $\omega_l = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$.

З граничних умов було знайдено $B_l = 0$. Вважаємо $A_l = 1$. Тоді відповідно рівняння власних форм коливань набере конкретного вигляду

$$U_l = \cos \frac{l\pi}{L} x. \quad (1.5.5)$$

Для тривіального значення частоти $\omega_0 = 0$ ($l = 0$) з (1.5.5) знаходимо рівняння форми коливань $U_0 = 1$. Підставимо згідно з (1.4.6) вираз $U_0 \eta_0(t)$ в (1.4.9), проінтегруємо результат і дістанемо

$$\eta_0(t) = N_0 + Q_0 t. \quad (1.5.6)$$

Отже, тривіальному значенню частоти $\omega_0 = 0$ відповідає поступальний рух стрижня в поздовжньому напрямку з початковим переміщенням N_0 початковою швидкістю Q_0 .

Системи з тривіальними значеннями власних частот називаються *невизначеними* — незакріпленими у відповідних напрямках.

На рис. 1.5.1, а зображено графіки (діаграми) власних форм коливань, які показують найбільші поздовжні відхилення перерізів стрижня від положення статичної рівноваги. На цих графіках є вузли (нерухомі перерізи) і пучності (перерізи, що мають найбільші переміщення). Число вузлів N -ї власної форми коливань дорівнює $N-1$, а число пучностей — N . До числа номерів N включають і форму коливань $U_0 = 1$. До числа вузлів не включають закріплений граничний переріз. Вузли та їх положення визначають, прирівнюючи до нуля рівняння відповідної форми коливань (1.5.5).

Підсумовуючи частинні розв'язки (1.3.2), знаходимо загальний розв'язок рівняння (1.4.9) для першого випадку граничних умов (1.5.1):

$$\begin{aligned}
U(x, t) &= U_0(N_0 + Q_0 t) + \sum_{l=1}^{\infty} a_l U_l(x) \cos(\omega_l t - \varphi_l) = \\
&= (N_0 + Q_0 t) + \sum_{l=1}^{\infty} \cos \frac{l\pi}{L} x (N_l \cos \omega_l t + Q_l \sin \omega_l t).
\end{aligned} \tag{1.5.7}$$

Загальний розв'язок (1.5.7) є суперпозицією форм коливань (стоячих хвиль), помножених на часові функції. Інакше: загальний розв'язок є суперпозицією «головних коливань».

Підставивши (1.5.7) в (1.5.1), визначимо скінченну множину часових сталих N_l і Q_l з початкових умов (1.4.12)

$$N_0 + \sum_{l=1}^{\infty} N_l U_l(x) = u_0(x); \quad Q_0 + \sum_{l=1}^{\infty} Q_l \omega_l U_l(x) = \dot{u}_0(x).$$

Останні суми помножимо на $\rho F U_l dx$ ($l = 0, 1, 2, \dots, \infty$), проінтегруємо в межах від 0 до L і, враховуючи умови (1.4.13), дістанемо систему алгебричних рівнянь

$$\begin{aligned}
N_0 M_0 &= \rho F \int_0^L u_0(x) dx; \quad Q_0 M_0 = \rho F \int_0^L \dot{u}_0(x) U_0 dx; = 1 \\
N_l M_l &= \rho F \int_0^L u_0(x) U_l dx; \quad Q_l \omega_l M_l = \rho F \int_0^L \dot{u}_0(x) U_l dx, \quad l = 1, 2, 3, \dots, \infty.
\end{aligned}$$

З них знаходимо

$$\begin{aligned}
N_0 &= \frac{\rho F \int_0^L u_0 dx}{M_0}; \quad Q_0 = \frac{\rho F \int_0^L \dot{u}_0 dx}{M_0}; \\
N_l &= \frac{\rho F \int_0^L u_0(x) dx}{M_l}; \quad Q_l = \frac{\rho F \int_0^L \dot{u}_0(x) U_l dx}{\omega_l M_l};
\end{aligned} \tag{1.5.8}$$

$$M_0 = \rho F l; \quad M_l = \int_0^L U_l^2 dx = \rho F \int_0^L \cos^2 \frac{l\pi}{L} x dx = \frac{\rho F L}{2}. \tag{1.5.9}$$

Знаючи сталі N_l і Q_l , (можна визначити і сталі α_l, φ_l , за допомогою формул (1.4.11).

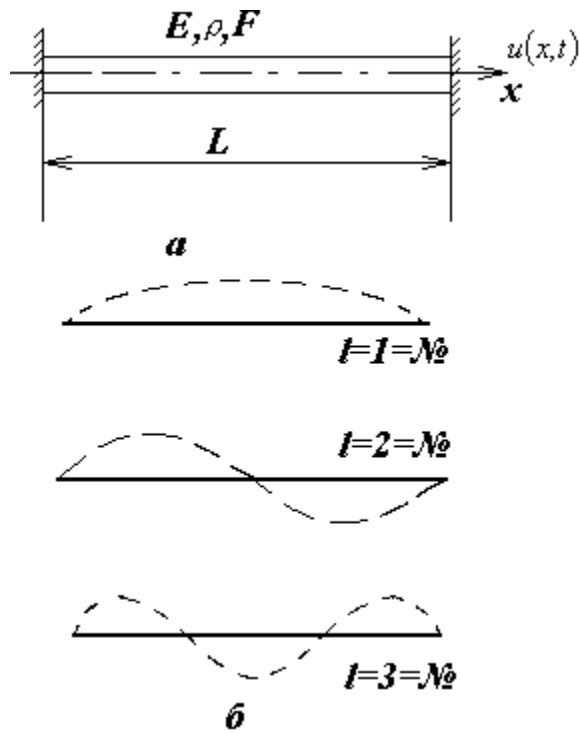


Рис. 1.5.2. Стрижень з закріпленими від поздовжніх переміщень кінцями (а) і його перші власні форми поздовжніх коливань (б)

Випадок 2. Обидва кінці стрижня закріплені від поздовжніх переміщень (рис. 1.5.2).

Враховуючи форму розв'язку (1.37), приводимо граничні умови (1.35) до вигляду

$$U_l(0) = U_l(L) = 0 \quad (1.5.10)$$

Підстановка частинного розв'язку (1.39) в умови (1.53) дає $A_l = 0$; $B_l \sin k_l L = 0$, Оскільки $B_l \neq 0$ (в протилежному випадку не буде коливань), то

$$\sin k_l L = 0. \quad (1.5.11 \quad 54)$$

Корені цього характеристичного (вікового) рівняння дорівнюють $k_l L = 0, \pi, 2\pi, \dots, l\pi, \dots$.

Корінь $k_0 L = 0$ потрібно відкинути, тому що стрижень закріплений і його поступальний рух з тривіальним значенням частоти $\omega_0 = 0$ неможливий. Тоді хвильові числа дорівнюватимуть

$$k_l = \frac{\pi l}{L}; l = 1, 2, 3, \dots, \infty. \quad (1.5.12)$$

Цим характеристичним (хвильовим) числом згідно (1.47) відповідають власні (головні) частоти і власні форми коливань системи (вважаємо $B_l=1$):

$$\omega_l = k_l c_0 = \frac{l\pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}; \quad (1.5.13)$$

$$U_l = \sin k_l x = \sin \frac{l\pi}{L} x. \quad (1.5.14)$$

Усі частоти кратні основній $\omega_l = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$. Загальний розв'язок набере вигляду суми стоячих хвиль (форм коливань), помножених на часові функції:

$$U(x, t) = \sum_{l=1}^{\infty} a_l U_l(x) \cos(k_l c_0 t - \varphi_l) = \sum_{l=1}^{\infty} \sin \frac{l\pi}{L} x (N_l \cos \omega_l t + Q_l \sin \omega_l t). \quad (1.5.15)$$

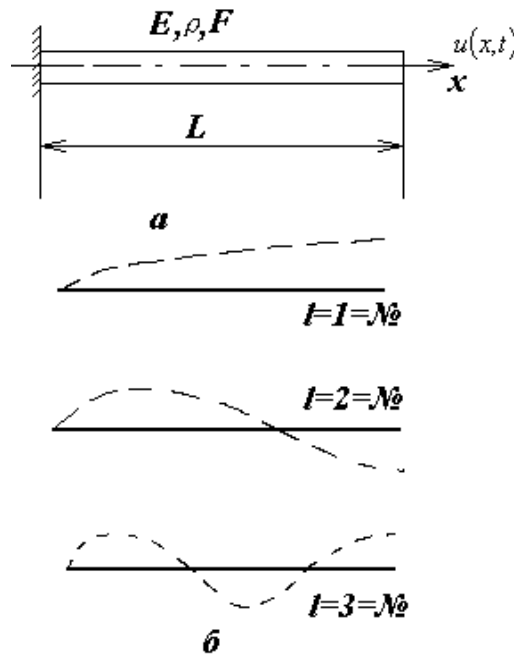


Рис. 1.5.3 Стрижень з одним закріпленням, а другим вільним для поздовжніх переміщень кінцями (а) і його перші власні форми поздовжніх коливань (б)

Випадок 3. Один кінець стрижня закріплений, другий вільний (рис. 1.5.3). Підставляючи в граничні умови

$$U_0(0) = \frac{dU_l(L)}{dx} = 0 \quad (1.5.16)$$

розв'язок (1.39), знаходимо $A_l = 0$; $B_l k_l \cos k_l L = 0$.

Оскільки $B_l \neq 0$ (в протилежному випадку не буде коливань) і $k_l \neq 0$ (стрижень закріплений), то

$$\cos k_l L = 0.$$

З цього частотного (вікового) рівняння знаходимо

$$k_l L = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots, \frac{2l-1}{2} \pi = \frac{l_{\text{нен}} \pi}{2}, \dots$$

$$k_l = \frac{2l-1}{2} \pi = \frac{l_{\text{нен}} \pi}{2} \quad (1.5.17)$$

Враховуючи (1.60), а також $A_l = 0$ і поклавши $B_l = 1$, маємо, згідно з (1.38) і (1.39), формулу для власних частот і рівняння форм коливань

$$\omega_l = k_l c_0 = \frac{2l-1}{2L} \pi \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \frac{l_{\text{нен}} \pi}{2}, \dots \quad (1.5.18)$$

$$U_l = \sin k_l x = \sin \frac{2l-1}{2L} \pi x = \sin \frac{l_{\text{нен}}}{2L} \pi x. \quad (1.5.19)$$

Власні частоти кратні основній частоті.

Загальний розв'язок хвильового рівняння матиме вигляд

$$U(x, t) = \sum_{l=1}^{\infty} a_l U_l(x) \cos(k_l c_0 t - \varphi_l) =$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty} \sin \frac{2l-1}{2L} \pi x (N_l \cos \omega_l t + Q_l \sin \omega_l t). \quad (1.5.20)$$

1.5.1. Метод біжучих хвиль (метод Д'Аламбера)

Розв'язок хвильового рівняння (1.31) шукаємо у вигляді

$$u(x, t) = f(x + at) \quad (1.5.1.1)$$

де f — двічі диференційована за складним аргументом $(x + at)$ функція.

Підставимо похідні $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''$; $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f'' a^2$ у рівняння (1.33) і знаходимо:

$$A = \pm c_0.$$

Загальним розв'язком рівняння (1.33) буде сума частинних розв'язків

(1.64)

$$u(x, t) = f_1(x - c_0 t) + f_2(x + c_0 t). \quad (1.5.1.2)$$

Функції f_1 і f_2 визначимо з початкових умов $u(x, 0) = u_0(x)$; $\dot{u}(x, 0) = 0$:

$$f_1(x) + f_2(x) = u_0(x); \quad c_0(-f_1' + f_2') = 0.$$

Інтегруючи друге рівняння, маємо

$$-f_1 + f_2 = C,$$

що разом з першим рівнянням дає

$$f_1 = \frac{1}{2}[u_0(x) - C]; \quad f_2 = \frac{1}{2}[u_0(x) + C].$$

Підстановка цих виразів в (1.65) і заміна аргументу x на $x \pm c_0 t$ приводить до розв'язку хвильового рівняння:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}u_0(x - c_0 t) + \frac{1}{2}u_0(x + c_0 t). \quad (1.5.1.3)$$

За загальних початкових умов $u(x, 0) = u_0(x)$; $\dot{u}(x, 0) = \dot{u}_0(x)$ розв'язок хвильового рівняння буде таким

$$u(x, t) = \frac{1}{2}u_0(x - c_0 t) + \frac{1}{2}u_0(x + c_0 t) + \frac{1}{2c_0} \int_{x-c_0 t}^{x+c_0 t} \dot{u}_0(\xi) d\xi. \quad (1.5.1.4)$$

Отже, розв'язок Д'Аламбера залежить тільки від початкових умов і тому використовується для нескінченно довгого стрижня, коли задано лише початкові умови. У випадку стрижня скінченної довжини відбувається накладання на (1.65) відбитих від кінців стрижня хвиль.

Значення функції $f_1(x - c_0 t)$ залишається весь час сталим, якщо її аргумент $x - c_0 t = \text{const}$, тобто $dx = c_0 dt$. А це означає, що графік $f_1(x - c_0 t)$ функції неперервно переміщується в додатний бік осі x . Тут $c_0 = \frac{dx}{dt}$ - фазова швидкість хвилі (швидкість звуку в матеріалі стрижня). Аналогічно встановлюємо, що графік функції — хвиля $f_2(x + c_0 t)$ переміщується у від'ємний бік осі x з тією ж швидкістю c_0 .

Від розв'язку Фур'є для хвильового рівняння можна прийти до розв'язку (1.66) Д'Аламбера. Дійсно, за початкових умов

$$u(x, 0) = u_0(x); \quad \dot{u}(x, 0) = 0.$$

З (1.5.15) дістанемо

$$U(x, t) = \sum_{l=1}^{\infty} N_l \sin k_l x \cos k_l c_0 t = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} N_l [\sin k_l (x - c_0 t) + \sin k_l (x + c_0 t)] \quad (1.5.1.4)$$

Звідки при $t = 0$ знаходимо

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2} N_l [\sin k_l x + \sin k_l x] = u_0(x); \quad \sum_{l=1}^{\infty} N_l \sin k_l x = u_0(x).$$

Підставивши останнє рівняння в розв'язок (1.67) і замінивши аргумент x на $x \pm c_0 t$, знову дістанемо (1.66).

Розглянемо l -й доданок у рівнянні (1.67). Він буде єдиним, якщо початкова умова визначається l -ю стоячою хвилею $u(x, 0) = U_l(x) = \sin k_l x$:

$$U_l(x, t) = \sin k_l x \cos k_l \omega_l t = \frac{1}{2} [\sin k_l (x - c_0 t) + \sin k_l (x + c_0 t)]. \quad (1.5.1.5)$$

Тут перший і другий доданки є рівняннями синусоїдних хвиль, які біжать відповідно в додатному та від'ємному напрямках осі x . Сума цих хвиль дає стоячу хвилю. Для синусоїдних хвиль введемо поняття довжини хвилі. Довжина хвилі λ_l дорівнює відстані, на яку поширюється біжуча хвиля за період T_l , часу

$$\lambda_l = c_0 T_l = \frac{2\pi}{k_l}. \quad (1.5.1.6)$$

Довжина хвилі λ_l (западина і горб або згущення та розрядження) зображає «просторовий період» (див. рис. 1.3 — 1.5). Для наведених випадків за допомогою (1.69) запишемо формули для довжини хвилі залежно від номера l хвильового числа $k_l = \frac{2\pi}{\lambda_l} = \frac{\omega_l}{c_0}$:

$$\lambda_l = \frac{2\pi}{k_l} = \frac{2\pi}{\left(\frac{l\pi}{L}\right)} = \frac{2L}{l}; \quad \lambda_l = \frac{2L}{l}; \quad \lambda_l = \frac{4L}{2L-1}. \quad (1.5.1.7)$$

Отже, стояча і біжуча синусоїдні хвилі мають однакову форму (графік). Але форма біжучої хвилі поширюється зі швидкістю звуку c_0 вздовж стрижня. Як у випадку стоячих, так і у випадку біжучих хвиль, точки стрижня не «біжать», а коливаються навколо свого положення статичної рівноваги.

1.5.2. Визначення власних частот і форм поздовжніх коливань стрижня за неоднорідних граничних умов

Гранична умова може бути неоднорідною в чотирьох випадках: а) пружне закріплення кінця; б) зосереджена маса на кінці; в) зосереджена сила на кінці; г) зосереджене на кінці переміщення.

В першому випадку на кінці виникає пружна сила $\pm cu$, у другому — сила інерції $\pm M\ddot{u}$ (верхній знак береться для лівого кінця, тому що сила розтягальна; нижній знак — для правого краю, тому що сила стискальна; (рис. 1.71). У третьому і четвертому випадках задачу можна звести до вимушених коливань за однорідних граничних умов.

Визначимо власні частоти і власні форми поздовжніх коливань стрижня постійного перерізу з масою на правому кінці (рис. 1.72). Алгоритм розв'язку задачі про вільні коливання такий самий, як і у випадку однорідних граничних умов. Граничні умови будуть інші (див. рис. 1.71):

$$u(0, t) = 0; \quad EF \frac{\partial u(L, t)}{\partial x} = -M\ddot{u}.$$

Перепишемо граничні умови з урахуванням форми розв'язку (1.36)

$$U_l(0) = 0; \quad EF \frac{dU_l(L)}{dx} = M\omega_l^2 U_l. \quad (1.5.2.1)$$

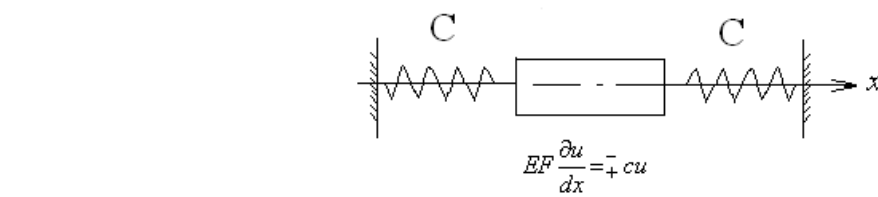
Підставивши (1.37) в граничні умови, матимемо

$$A_l = 0; \quad EFB_l k_l \cos k_l L = M\omega_l^2 B_l \sin k_l L. \quad (1.5.2.2)$$

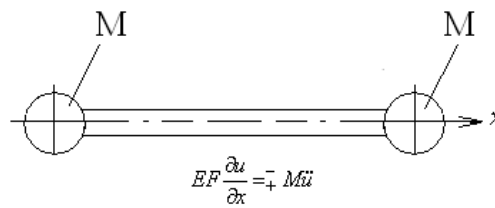
Враховуючи, що $\omega_l^2 = k_l^2 \frac{E}{\rho}$ — відповідно до (1.38), помножимо (1.72)

на $k_l L$, в результаті прийдемо до характеристичного (вікового) рівняння

$$k_l L t g k_l L = \frac{\rho F L}{M} = \alpha . \quad (1.5.2.3)$$



a)



б)

Рис 1.5.2.1 6. Стрижень з неоднорідними граничними умовами:
а-пружне закріплення кінців ; б-зосередження мас на кінцях

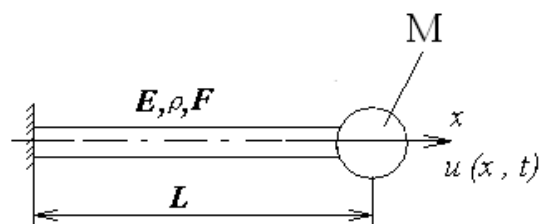


Рис 1.5.2.2 7. Закріплений стрижень із зосередженою масою на вільному кінці

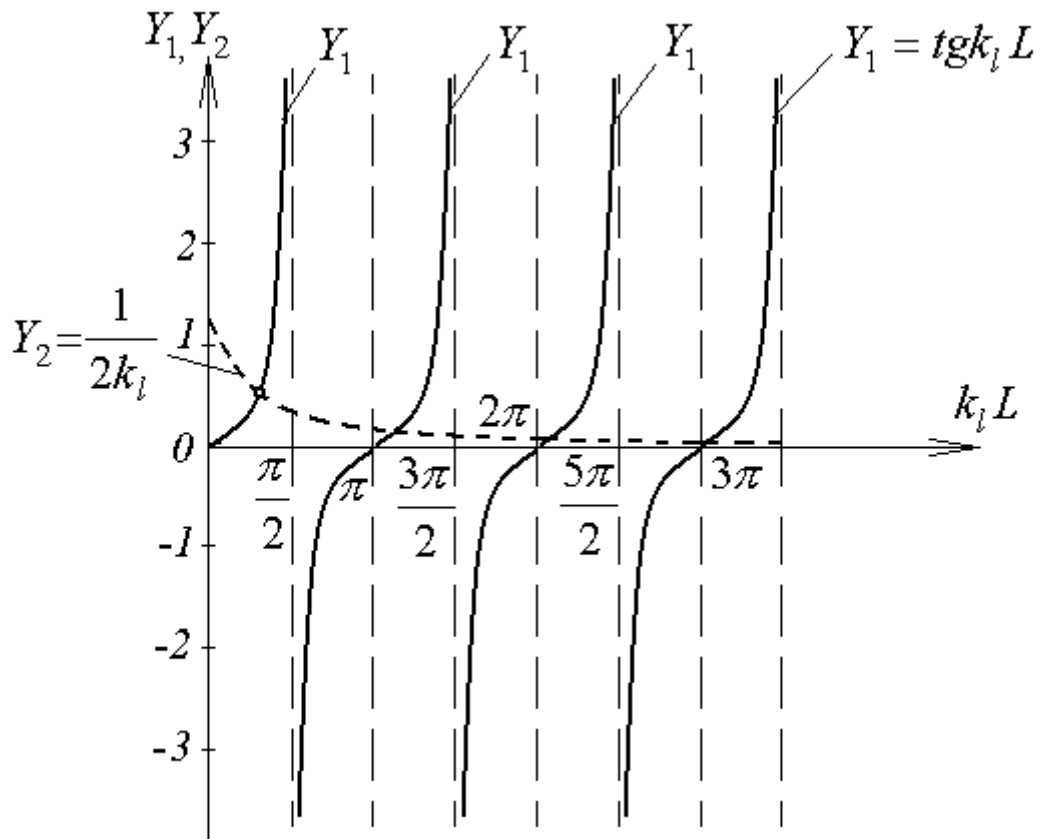


Рис 1.5.2.3 . Графічний розв'язок частотного рівняння (1.73)

Графічний розв'язок рівняння (1.73), представлений на рис. 1.73, для відношення $\alpha = \frac{\rho FL}{M} = 0.5$ дає корені $k_1 L = 0.629$; $k_2 L = 3.24$; $k_3 L = 6.34, \dots$

За формулою (1.38) визначимо частоти

$$\omega_1 = \frac{0.629}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}; \quad \omega_2 = \frac{3.24}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}; \quad \omega_3 = \frac{6.34}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Ці частоти вже не кратні основній частоті. Припустимо $B_l = 1$, тоді, з урахуванням $A_l = 0$, маємо рівняння форм коливань

$$U_l = \sin k_l x.$$

Умови ортогональності і формули зведення за неоднорідних граничних умов теж змінюються. Якщо на кінці стрижня ($x = L$) прикладено зосереджену масу M , то змінюються лише умови відносно кінетичної енергії

$$\int_0^L \rho F U_l U_s ds + M U_l(L) U_s(L) = \begin{cases} 0 & \text{при } s \neq l \\ M_l & \text{при } s = l \end{cases}. \quad (1.5.2.4)$$

Якщо кінець стрижня (наприклад, $x = L$) пружно закріплено (зосереджена пружина з коефіцієнтом жорсткості c), то змінюються лише умови відносно потенціальної енергії

$$\int_0^L EF \frac{dU_l}{dx} \frac{dU_s}{dx} dx + cU_l(L)U_s(L) = \begin{cases} 0 & \text{при } s \neq l \\ K_l & \text{при } s = l \end{cases}. \quad (1.5.2.5)$$

Якщо на одному кінці прикладено зосереджену масу, а на другому — пружину c , то одночасно змінюються умови ортогональності і формули зведення як відносно кінетичної, так і потенціальної енергій, причому в ці умови ввійдуть координати точок прикладення маси і пружини. Співвідношення (1.74) і (1.75) доводяться за допомогою рівності (1.27) чи (1.28) з урахуванням неоднорідних граничних умов.

1.5.3. Вільні поздовжні коливання стрижня з урахуванням внутрішнього або зовнішнього тертя

Внутрішнім тертям називають силу опору коливанням, яка виникає внаслідок недосконалої пружності матеріалу. *Зовнішнім тертям* називається опір середовища.

Внутрішнє чи зовнішнє тертя має в'язку (пропорційне швидкості переміщення) чи незалежну від частоти (пропорційне гістерезисній частині переміщення) природу. Для спрощення вважаємо оператор внутрішнього тертя пропорційним пружному, а оператор зовнішнього — інерційному оператору. В цьому випадку можливе повне розділення змінних при застосуванні методу головних координат.

В'язке внутрішнє тертя. Припустимо в (1.2.5) $q = 0$ і $B_2 = 0$, тоді матимемо рівняння вільних поздовжніх коливань з урахуванням в'язкого внутрішнього тертя

$$\rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(EF \frac{\partial u}{\partial x} \right) - b_1 \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \left(EF \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0. \quad (1.5.3.1)$$

Розв'язок шукаємо за методом головних координат у вигляді:

$$U_l(x, t) = \sum_{l=1}^{\infty} U_l(x) \eta_l(t), \quad (1.5.3.2)$$

де $U_l(x)$ визначається з рівняння

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(EF \frac{\partial U_l}{\partial x} \right) + \rho F \omega_l^2 U_l = 0 \quad (1.5.3.3)$$

і відповідних граничних умов.

Підставимо (1.77), (1.78) в (1.76), помножимо результат на $U_s(x)dx$ і проінтегруємо по x в межах від 0 до l . З урахуванням умов (1.29) дістанемо скінченну множину незалежних між собою рівнянь

$$\ddot{\eta}_l + b_l \omega_l^2 + \omega_l^2 \eta_l = 0, \quad (1.5.3.4)$$

$$l = 1, 2, 3, \dots; \quad b_l \omega_l^2 = 2h_l. \quad (1.5.3.5)$$

Частинні розв'язки знаходимо за методом Ейлера у вигляді

$$\eta_l = B_l e^{\lambda_l t}. \quad (1.5.3.6)$$

Підстановка (1.81) в (1.79) дає рівняння, з якого знаходимо характеристичні числа.

Можливі три випадки. Обмежимося першим — випадком малого тертя $h_l^2 < \omega_l^2$, коли

$$\lambda_1 = -h_l + i\tilde{\omega}_l; \quad \lambda_2 = -h_l - i\tilde{\omega}_l, \quad \text{де } \tilde{\omega}_l = \sqrt{\omega_l^2 - h_l^2}. \quad (1.5.3.7)$$

За принципом суперпозиції будемо загальний розв'язок для l -ї головної координати

$$\eta_l = \frac{A_l}{2} e^{-i\varphi} \cdot e^{-h_l t + i\tilde{\omega}_l t} + \frac{A_l}{2} e^{i\varphi} \cdot e^{-h_l t - i\tilde{\omega}_l t} = A_l e^{-h_l t} \cos(\tilde{\omega}_l t - \varphi_l). \quad (1.5.3.8)$$

Логарифмічний декремент головного коливання залежить від частоти

$$\Lambda_l = h_l \tilde{T}_l = \frac{b_l \omega_l^2}{2} \cdot \frac{2\pi}{\tilde{\omega}_l} \approx b_l \pi \omega_l,$$

що не підтверджує експеримент. Із затухаючих головних коливань будемо загальний розв'язок, підставляючи (1.83) в (1.77):

$$U(x, t) = \sum_{l=1}^{\infty} A_l e^{-h_l t} U_l(x) \cos(\varpi_l t - \varphi_l). \quad (1.5.3.9)$$

Здобутий розв'язок свідчить, що загальний рух є затухаючим коливальним, якщо для всіх l буде $h_l < \omega_l$. При $h_l = \omega_l$ і $h_l > \omega_l$ рух не буде коливальним.

Зовнішнє в'язке тертя. Рівняння вільних коливань стрижня з урахуванням зовнішнього в'язкого тертя

$$\rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b_2 \rho F \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(EF \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0. \quad (1.5.3.10)$$

Розв'язок рівняння знаходять за допомогою алгоритму, що описаний в попередньому розділі. Він матиме вигляд (1.84). Відмінність полягає в тому, що середній член рівняння (1.79) замінюється на $b_2 \eta_l$ і, отже, коефіцієнт демпфірування і логарифмічний декремент l -го головного коливання дорівнюватимуть

$$2h_l = b_2; \quad \Lambda_l = h_l T_l = \frac{b_2}{2} \frac{2\pi}{\varpi_l} \approx \frac{b_2 \pi}{\omega_l}. \quad (1.5.3.11)$$

Внутрішнє частотно-незалежне тертя. Замінивши в (1.15) та прийняв $q = 0, b_2 = 0$, модуль E оператором Сорокіна $E(1 + \alpha_1 i)$, матимемо рівняння вільних коливань з урахуванням частотно-незалежного внутрішнього тертя:

$$\rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha_1 i \frac{\partial}{\partial x} \left(EF \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(EF \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0. \quad (1.5.3.12)$$

Використання процедури методу головних координат дає рівняння коливань l -ї головної координати та характеристичне рівняння

$$\ddot{\eta}_l + \alpha_1 \omega_l^2 i \eta_l + \omega_l^2 i \eta_l = 0; \quad \lambda^2 + i \alpha_1 \omega_l + \omega_l^2 = 0.$$

Оскільки не всі коефіцієнти останнього рівняння дійсні числа, то корені будуть комплексні, але не спряжені:

$$\lambda_{1l} = -h_l + i \tilde{\omega}_l; \quad \lambda_{2l} = h_l + i \tilde{\omega}_l, \quad (1.5.3.13)$$

$$\text{де } h_l^2 = \frac{\omega_l^2}{2} (-1 + \sqrt{1 + \alpha_1^2}); \quad \varpi_l^2 = \frac{\omega_l^2}{2} (1 + \sqrt{1 + \alpha_1^2}).$$

Перший корінь (1.88) відповідає стійкому розв'язку, а другий — нестійкому і має бути відкинутим у цьому випадку, але тоді порушується принцип суперпозиції розв'язків.

Таким чином, застосування лінійної моделі комплексного модуля при нестационарних коливаннях не є коректним. Тому при дослідженні нестационарних коливань з урахуванням частотно-незалежного тертя замість оператора Сорокіна зсуву будемо використовувати оператор Бока — Шліппе — Колара у найпростішому вигляді (для рівнянь в головних координатах)

$$\alpha_1[\omega]^{-1} \frac{\partial}{\partial t}.$$

Рівняння вільних поздовжніх коливань стрижня з урахуванням тертя за гіпотезою Бока — Шліппе — Колара матиме вигляд

$$\rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha_1[\omega]^{-1} \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \left(EF \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(EF \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0. \quad (1.5.3.14)$$

Далі застосовуємо процедуру методу головних координат і прийдемо до розв'язку (1.84). При цьому l -е рівняння l -ї головної координати матиме вигляд

$$\ddot{\eta}_l + \alpha_1 \omega_l \dot{\eta}_l + \omega_l^2 \eta_l = 0. \quad (1.5.3.15)$$

Корені характеристичного рівняння будуть комплексно спряженими. Розв'язок рівняння (1.80) коректний, тому що він є суперпозицією двох стійких частинних розв'язків. При цьому на відміну від випадку в'язкого тертя логарифмічний декремент l -го головного коливання не залежить від частоти

$$\Lambda_l = h_l \frac{2\pi}{\omega_l} = \frac{\alpha_1 \omega_l}{2} \frac{2\pi}{\omega_l} \approx \alpha_1 \pi. \quad (1.5.3.16)$$

Розглянуту гіпотезу врахування тертя називають скоректованою гіпотезою Кельвіна — Фойхта.

1.5.4. Вимушені поздовжні коливання ідеально пружного стрижня без урахування зовнішнього тертя

Довільна змушувальна сила. Розв'язок рівняння поздовжніх коливань стрижня під дією довільної сили

$$\rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(EF \frac{\partial u}{\partial x} \right) = q(x, t). \quad (1.5.4.1)$$

будується у вигляді розкладу за власними формами коливань (метод головних координат)

$$u(x, t) = \sum_{l=1}^{\infty} U_l(x) \eta_l(t), \quad (1.5.4.2)$$

де $\eta_l(t)$ — шукані головні координати; $U_l(t)$ — власні форми коливань, знайдені в задачі про вільні коливання з рівняння

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(EF \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \rho F \omega_l^2 U_l = 0, \quad (1.5.4.3)$$

і заданих граничних умов. Помножимо результат підстановки (1.93), (1.94) в (1.92) на $U_s(x)dx$, проінтегруємо по x від 0 до L і, враховуючи умови (1.29), дістанемо систему незалежних рівнянь зі сталими коефіцієнтами:

$$M_l (\ddot{\eta}_l + \omega_l^2 \eta_l) = q_l(t); l = 1, 2, 3, \dots, \infty; \quad q_l(t) = \int_0^L q(x, t) U_l(x) dx. \quad (1.5.4.4)$$

За тривіальних початкових умов розв'язком цього рівняння є інтеграл переміщень:

$$\eta_l = \frac{1}{M_l \omega_l} \int_0^t \int_0^L q(x, \tau) U_l(x) \sin \omega_l(t - \tau) d\tau. \quad (1.5.4.5)$$

Підставимо (1.96) в (1.93) і знайдемо розв'язок вихідного рівняння (1.92) в довільній системі координат:

$$u(x, t) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{M_l \omega_l} \int_0^t \int_0^L q(x, \tau) U_l(x) \sin \omega_l(t - \tau) d\tau. \quad (1.5.4.6)$$

Приклад 1. Знайти закон коливань від раптово прикладеної до вільного кінця ідеально пружного стрижня осьової сили (рис. 1.5.4.1).

Розв'язання. Зведемо зосереджену раптову силу до формально розподіленої і залежної від часу за допомогою дельта-функції $\delta(x-L)$ та одиничної функції $\sigma_l(t)$.

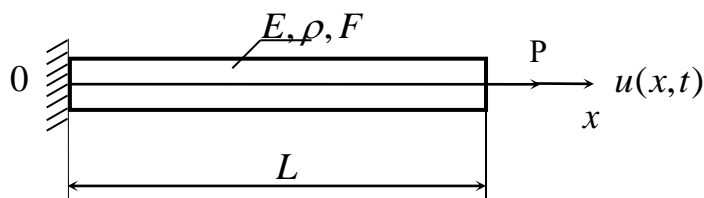


Рис. 1.5.4.1. Стрижень з одним закріпленням від поздовжніх переміщень кінцем і раптово прикладеною осьовою силою на другому кінці

Тоді рівняння коливань і його розв'язок матимуть вигляд рівняння (1.92) і розв'язку (1.97):

$$\rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(EF \frac{\partial u}{\partial x} \right) = P \delta(x-L) \sigma_l = q(x,t),$$

$$u(x,t) = P \sum_{l=1}^{\infty} \frac{U_l(L) U_l(x)}{M_l \omega_l^2} (1 - \cos \omega_l t).$$

Тут враховані значення інтегралів:

$$\int_0^L P U_l(x) \rho(x-L) dx = P U_l(L); \int_0^L \sigma_l \sin \omega_l(t-\tau) d\tau = \frac{1}{M_l \omega_l^2} (1 - \cos \omega_l t).$$

Згідно з (1.5.18), (1.5.19) для цього прикладу маємо:

$$U_l = \sin \frac{2l-1}{2L} \pi x, \omega_l = \frac{(2l-1)}{2L} \pi \sqrt{\frac{E}{\rho}}; M_l = \frac{\rho FL}{2}.$$

Максимальне переміщення, кінцевого перерізу $x=L$ дорівнює:

$$U_{\max} = \frac{16PL}{\pi^2 EF} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \right) = \frac{2PL}{EF}.$$

Для обчислення останнього результату використано значення суми числового ряду, що міститься в круглих дужках. Воно дорівнює $\frac{\pi^2}{8}$.

Знайдене динамічне переміщення більше за статичне $\frac{PL}{EF}$ у два рази.

Гармонічне розподілене навантаження. Для побудови розв'язку рівняння поздовжніх коливань стрижня під дією розподіленої гармонічної сили:

$$\rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(EF \frac{\partial u}{\partial x} \right) = q(x) \cos \omega t, \quad (1.5.4.7)$$

використовується також метод головних координат. За допомогою цього методу дістанемо зліченну множину:

$$M_l (\ddot{\eta}_l + \omega_l^2 \eta_l) = q_l \cos \omega t; \quad q_l = \int_0^L q(x) U_l(x) dx. \quad (1.5.4.8)$$

Частинний розв'язок, що відповідає суто вимушеним коливанням, шукаємо за виглядом правої частини:

$$\eta_l(t) = \alpha_l \cos(\omega t - \varphi). \quad (1.5.4.9)$$

Оскільки в системі немає тертя, то $\varphi_l = 0$. Підставляючи (1.5.4.9) в (1.5.4.8), при $\omega \neq \omega_l$ визначимо:

$$\alpha_l = \frac{\int_0^L q(x) U_l(x) dx}{M_l(\omega_l^2 - \omega^2)}; \quad \eta_l = \frac{\int_0^L q(x) U_l(x) dx}{M_l(\omega_l^2 - \omega^2)} \cos \omega t. \quad (1.5.4.10)$$

При $\omega = \omega_l$ виникає резонанс l -ї головної координати, коли $\int_0^L q(x) U_l(x) dx = 0$. А при резонансі $\omega = \omega_l$ замість (1.101) розв'язком буде віковий член:

$$\eta_l = \frac{t \int_0^L q(x) U_l(x) dx}{2M_l \omega} \sin \omega t. \quad (1.5.4.11)$$

Підставимо (1.101) в (1.93) і матимемо розв'язок рівняння (1.5.4.7), який відповідає усталеним нерезонансним коливанням:

$$u(x,t) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{U_l(x) \cos \omega t \cdot \int_0^L q(x) U_l(x) dx}{M_l(\omega_l^2 - \omega^2)}. \quad (1.5.4.12)$$

Приклад 2. Знайти закон усталених вимушених коливань стрижня (рис. 1.92).

Розв'язання. Підставивши в (1.103) величину $q(x) = q \sigma_t(x - x_0) \omega t$, матимемо $\omega \neq \omega_l$

$$u(x,t) = q \cos \omega t \cdot \sum_{l=1}^{\infty} \frac{U_l(x) \int_0^L q(x) U_l(x) dx}{M_l(\omega_l^2 - \omega^2)},$$

де $U_l = \sin \frac{\pi l}{L} x$ - власна форма коливань

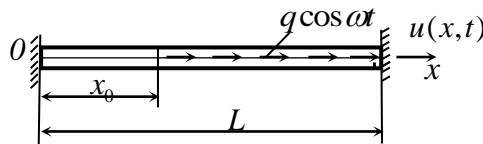


Рис. 1.5.4.1 Стрижень з двома закріпленими кінцями під дією перервної розподіленої сили

Зосереджена гармонічна сила. Зосереджену в точці $x = x_0$ гармонічну силу $P \cos \omega t$ можна звести до формально розподіленої за допомогою дельта-функції і потім скористатися розв'язком (1.103)

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{U_l(x) \int_0^L P \delta(x - x_0) U_l(x) dx}{M_l(\omega_l^2 - \omega^2)} \cos \omega t = \\ &= P \cos \omega t \sum_{l=1}^{\infty} \frac{U_l(x_0) U_l(x)}{M_l(\omega_l^2 - \omega^2)}; \quad \omega \neq \omega_1. \end{aligned} \quad (1.5.4.13)$$

Якщо сила $P \cos \omega t$ прикладена на вільному кінці, то крім розв'язку, що зображає суперпозицію головних коливань, можна добути замкнений розв'язок, включаючи силу до неоднорідної граничної умови.

Приклад 3. Знайти безпосередній розв'язок задачі про вимушені поздовжні коливання стрижня (рис. 1.5.4.2).

Розв'язання. Однорідному рівнянню коливань стрижня

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (1.5.4.14)$$

за неоднорідних граничних умов

$$u(0, t) = 0; EF \frac{\partial u(L, t)}{\partial x} = P \cos \omega t, \quad (1.5.4.15)$$

має задовольняти замкнений розв'язок

$$u(0, t) = U(x) \cos \omega t. \quad (1.5.4.16)$$

Підстановка (1.107) до (1.106) дає рівняння шуканої форми коливань -

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\omega^2}{c_0^2} u = 0. \text{ Його загальний розв'язок:}$$

$$U(x) = B \cos \frac{\omega}{c_0} x + A \sin \frac{\omega}{c_0} x,$$

підставимо до першої умови (1.39). Знайдемо $B=0$. Тоді $U(x) = A \sin \frac{\omega}{c_0} x$,

підставимо до (1.107), а результат до другої умови (1.106):

$$AEF \cos \frac{\omega}{c_0} L = P.$$

$$\text{Звідси амплітуда коливань } A = \frac{P c_0}{EF \omega \cos \frac{\omega}{c_0} L}.$$

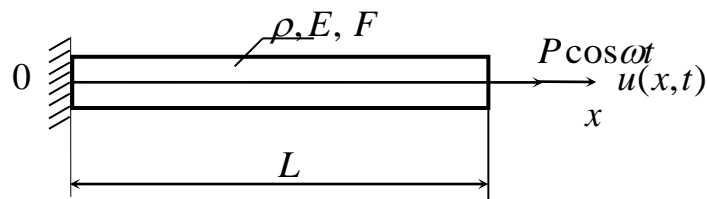


Рис. 1.5.4.2. Стрижень з одним закріпленим кінцем під дією зосередженої гармонічної сили

Розв'язок (1.107) набуде остаточного вигляду:

$$u(x, t) = \frac{P c_0}{EF \omega \cos \frac{\omega}{c_0} L} \cdot \sin \frac{\omega}{c_0} x \cos \omega t,$$

$$\text{де } \cos \frac{\omega}{c_0} L = 0; \omega \neq \omega_l = \frac{(2l-1)\pi}{2L} c_0.$$

1.5.5. Вимушені поздовжні коливання стрижня з урахуванням внутрішнього або зовнішнього тертя

Довільна в часі розподілена по осі стрижня змущувальна сила. В розглядуваному випадку довільної змущувальної сили математично коректними лінійними моделями внутрішнього тертя будуть тільки дві: Кельвіна — Фойхта та Бока — Шліппе — Колара. Зовнішнє тертя можна вважати в'язким.

Для повного розділення змінних при використанні методу головних координат, як і раніше, вважаємо, що демпфірувальний оператор буде пропорційний пружному оператору при внутрішньому терті та інерційному — при зовнішньому терті.

Рівняння поздовжніх вимушених коливань з урахуванням внутрішнього тертя відповідно до Кельвіна — Фойхта та Бока — Шліппе — Колара і зовнішнього в'язкого тертя записують так:

$$\rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - b_1 \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \left(EF \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(EF \frac{\partial u}{\partial x} \right) = q(x, t); \quad (1.5.5.1)$$

$$\rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha_1 [\omega]^{-1} \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \left(EF \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(EF \frac{\partial u}{\partial x} \right) = q(x, t); \quad (1.5.5.2)$$

$$\rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - b_2 \rho F \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(EF \frac{\partial u}{\partial x} \right) = q(x, t). \quad (1.5.5.3)$$

Розв'язок кожного з цих рівнянь шукаємо у вигляді розкладу

$$u(x, t) = \sum_{l=1}^{\infty} U_l(x) \eta_l(t) \quad (1.5.5.4)$$

за власними формами коливань (метод головних координат), знайденим раніше з рівняння

$$\frac{d}{dx} \left(EF \frac{dU_l}{dx} \right) + \rho F \omega_l^2 U_l = 0 \quad (1.5.5.5)$$

і заданих граничних умов. Помножимо результат підстановки (1.111), (1.112) в (1.108) — (1.110) на $U_s(x)dx$, проінтегруємо по x в межах від 0 до L і, враховуючи (1.3.10), дістанемо відповідну кожному з трьох рівнянь (1.108) — (1.110) свою зліченну множину рівнянь коливань головних координат у такому вигляді:

$$\begin{aligned} M_l(\ddot{\eta}_l + b_l\omega_l^2\dot{\eta}_l + \omega_l^2\eta_l) &= q_l(t); \\ M_l(\ddot{\eta}_l + \alpha_l\omega_l^2\dot{\eta}_l + \omega_l^2\eta_l) &= q_l(t); \\ q_l(t) &= \int_0^L q(x,t)U_l(x)dx. \end{aligned} \quad (1.5.5.6)$$

За тривіальних початкових умов розв'язок 1-го рівняння будь-якої з наведених множин представимо інтегралом переміщень

$$\eta_l = \frac{e^{-h_l t}}{M_l\omega_l} \int_0^t \int_0^L q(x,\tau)U_l(x)e^{h_l\tau} \sin \tilde{\omega}_l dx d\tau, \quad (1.5.5.7)$$

в якому демпфійована частота $\omega_l = \sqrt{\omega_l^2 - h_l^2}$ визначається з урахуванням різних виразів для коефіцієнту демпфірування в трьох розглядуваних випадках:

$$h_l = \frac{b_l\omega_l^2}{2}, \quad h_l = \frac{\alpha_l\omega_l^2}{2}, \quad h_l = \frac{b_2}{2}. \quad (1.5.5.8)$$

Якщо початкові умови не є тривіальними, то до (1.114) додається визначений цими умовами загальний розв'язок однорідного рівняння 1-ї головної координати. Підставимо (1.114) до (1.111), тоді

$$u(x,t) = \sum_{l=1}^{\infty} U_l(x) \frac{e^{-h_l t}}{M_l\omega_l} \int_0^t \int_0^L q(x,\tau)U_l(x)e^{h_l\tau} \sin \tilde{\omega}_l(t-\tau) dx d\tau,$$

що є загальним (за тривіальних початкових умов) розв'язком будь-якого з вихідних рівнянь (1.108)—(1.110). Проте при цьому для h_l береться значення з ряду формул (1.115), що відповідають гіпотезі Кельвіна — Фойхта, Бока — Шліппе — Колара або зовнішньому в'язкому тертю.

Гармонічне розподілене осьове навантаження. В рівняннях (1.108)—(1.110) праві частини $q(x,t)$ замінюємо на $q(x)\cos\omega t$, а потім застосовуємо процедуру (1.111)—(1.113) переходу до головних координат. Матимемо

зліченню множину рівнянь для головних координат відповідно з урахуванням внутрішнього тертя за гіпотезами Кельвіна — Фойхта, Бока — Шліппе — Колара або з урахуванням зовнішнього в'язкого тертя:

$$M_l(\ddot{\eta}_l + b_l\omega_l^2\dot{\eta}_l + \omega_l^2\eta_l) = q_l(x)\cos\omega t, \quad (1.5.5.9)$$

$$M_l(\ddot{\eta}_l + \alpha_l\omega_l\dot{\eta}_l + \omega_l^2\eta_l) = q_l(x)\cos\omega t, \quad (1.5.5.10)$$

$$M_l(\ddot{\eta}_l + b_2\omega_l^2\dot{\eta}_l + \omega_l^2\eta_l) = q_l(x)\cos\omega t \quad (1.5.5.11)$$

$$q_l(t) = \int_0^L q(x)U_l(x)dx; \quad l=1,2,3,\dots$$

Частинний розв'язок кожного з цих рівнянь шукаємо у вигляді:

$$\eta_l = \alpha_l \cos(\omega t - \varphi_l) = \alpha_l \cos\psi_l. \quad (1.5.5.12)$$

Підставимо в (1.116)...(1.118) форму розв'язку і вираз:

$$\cos\omega t = (\psi_l + \varphi_l) = \cos\psi_l \cos\varphi_l - \sin\psi_l \sin\varphi_l,$$

а потім прирівняємо коефіцієнти при $\cos\psi_l$ і $\sin\psi_l$ та дістанемо систему двох рівнянь відносно сталих α_l і φ_l розв'язку (1.119):

$$\left. \begin{aligned} M_l\alpha_l(\omega_l^2 - \omega^2) &= q_l \cos\varphi_l \\ 2M_l\alpha_l h_l \omega &= q_l \sin\varphi_l \end{aligned} \right\}; \quad (1.5.5.13)$$

Ця система однакова для всіх трьох випадків урахування тертя, коли h_l визначається формулами (1.115). З рівнянь (1.120) знаходимо:

$$\alpha_l = \frac{\int_0^L q(x)U_l(x)dx}{M_l\sqrt{(\omega_l^2 - \omega^2)^2 + 4h_l^2\omega^2}}; \quad \operatorname{tg}\varphi_l = \frac{2h_l\omega}{\omega_l^2 - \omega^2}. \quad (1.5.5.14)$$

Враховуючи (1.121), надамо рівнянню (1.119) остаточного вигляду:

$$\eta_l = \frac{\int_0^L q(x)U_l(x)dx}{M_l\sqrt{(\omega_l^2 - \omega^2)^2 + 4h_l^2\omega^2}} \cos(\omega t - \varphi_l).$$

Це рівняння визначає суто вимушені гармонічні коливання 1-ї головної координати у всіх трьох областях — дорезонансній, резонансній, за-

резонансній і збігається з таким самим рівнянням для системи з одним ступенем вільності. Підставивши знайдене рівняння в (1.111), дійдемо загального (за тривіальних початкових умов) розв'язку:

$$u(x, t) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\int_0^L q(x) U_l(x) dx}{M_l \sqrt{(\omega_l^2 - \omega^2)^2 + 4h_l^2 \omega^2}} \cos(\omega t - \varphi_l), \quad (1.5.5.15)$$

вихідного рівняння (1.108), (1.109) або (1.110) за умови $q(x, t) = q(x) \cos \omega t$, коли обчислюється за першою, другою чи третьою формулами (1.115).

Використовуючи метод головних координат разом з методом комплексних амплітуд, розв'язок (1.122) подамо у вигляді:

$$u(x, t) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{U_l(x) dx q_l e^{i\omega t}}{M_l [(i\omega_l)^2 + 2h_l^2 i\omega + \omega_l^2]} = W(x, \omega) e^{i\omega t}, \quad (1.5.5.16)$$

де $W(x, \omega)$ — частотна передатна функція — реакція коливальної системи на одиничне гармонічне збудження $e^{i\omega t}$.

Розраховуючи резонанс 1-ГО порядку $\omega = \omega_l$, в сумі (1.122) за правилом Відлера залишаємо тільки 1-й доданок, а іншими нехтуємо як малими величинами.

Зауважимо, що при дослідженні усталених коливань буде математично коректним і застосування гіпотези Сорокіна для врахування внутрішнього тертя. Результати обчислення у цьому випадку збігаються з результатами, отриманими за допомогою гіпотези Бока — Шліппе — Колара.

Приклад 4. Знайти розв'язок задачі про поздовжні коливання стрижня (див. рис. 1.11) з урахуванням внутрішнього тертя за гіпотезою Бока — Шліппе — Колара і Кельвіна — Фойхта.

Розв'язання визначається формулою (1.122).

1. Знаходимо значення величин, які входять у цю формулу:

$$q_l = \int_0^L P \rho (x - L) U_l dx = P U_l(L); \quad \int_0^L \rho F U_l^2 dx = M_l;$$

$$\omega_l^2 = k_l^2 \frac{E}{\rho}; \quad h_l = \frac{\alpha_l \omega_l}{2}; \quad \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{2h_l \omega}{\omega_l^2 - \omega^2}. \quad (1.5.5.17)$$

2. При резонансі $\omega = \omega_l$ буде $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$. За правилом Відлера залишаємо в сумі тільки резонансний член. Тоді розв'язок матиме вигляд:

$$u(x, t) \approx P U_l(L) \frac{\sin k_1 x}{M_l \alpha_l \omega_l^2} \sin \omega t. \quad (1.5.5.18)$$

3. За гіпотезою Кельвіна—Фойхта $h_l = \frac{b_l \omega^2}{2}$. Тоді розв'язок (1.122) набере вигляду:

$$u(x, t) \approx P U_l(L) \frac{\sin k_1 x}{M_l b_l \omega_l^2} \sin \omega t, \quad (1.5.5.19)$$

де $U(x, t) = \sin k_1 x$.

1.5.6. Кінематичне збудження поздовжніх коливань стрижня

Закріпленому кінцю стрижня надамо переносного поступального руху $U^e(t)$. Він може бути гармонічним, періодичним або довільним у часі. Такого руху набувають і всі інші перерізи стрижня. В стрижні можуть виникнути і поздовжні коливання — змінні переміщення перерізів $U^r(t, x)$ відносно переносного руху (рис. 1.127). У цьому випадку абсолютне переміщення перерізів стрижня дорівнюватиме:

$$u(x, t) = u^e(t) + u^r(t). \quad (1.5.6.1)$$

Деформації, напруження і внутрішні зусилля виникають від відносних, а сили інерції — від абсолютних переміщень і обчислюються за формулами:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\partial u^r}{\partial x}; \quad \sigma = E\varepsilon = E \frac{\partial u^r}{\partial x}; \\ N &= \sigma F = EF \frac{\partial u^r}{\partial x}; \quad \rho F \ddot{u} = \rho F (\ddot{u}^e + \ddot{u}^r) \end{aligned} \quad (1.5.6.2)$$

Розглянемо динамічну рівновагу елемента dx коливального стрижня (рис. 1.128), включаючи до числа діючих на елемент сил і д'аламберові сили інерції. Підставимо в умову динамічної рівноваги елемента:

$$\rho F \ddot{u} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

відповідні вирази (1.128), матимемо:

$$\rho F \ddot{u}^r - \frac{\partial}{\partial x} \left(EF \frac{\partial u^r}{\partial x} \right) = -\rho F \ddot{u}^e, \quad (1.5.6.3)$$

рівняння поздовжніх коливань стрижня у відносній системі відліку, в якій змущувальною силою буде сила інерції переносного руху (ейлерова сила інерції). Інтенсивні коливання виникнуть тоді, коли переносний рух буде гармонічним з частотою ω , яка дорівнює будь-якій власній частоті стрижня ω_l . В цьому випадку потрібно враховувати тертя. Якщо тертя внутрішнє, в'язке, то потрібно замінити E на оператор $EF \left(1 + b_1 \frac{\partial}{\partial t} \right)$ в рівнянні (1.129).

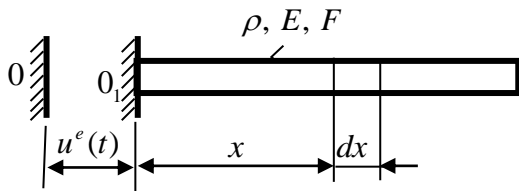


Рис. 1.5.6.1 12. Кінематичне збудження поздовжніх коливань

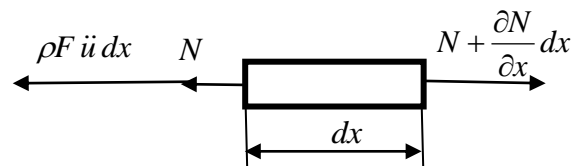


Рис. 1.5.6.2 13. Схема сил, які діють на елемент стрижня його поздовжніх коливаннях

Розглянемо інший можливий вид кінематичного збудження, коли переносний поступальний рух надається не всім перерізам, а, наприклад, одному з координатою $x = \frac{L}{2}$. Тоді рівняння коливань набере вигляду:

$$\rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[EF \left(1 + b_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial u}{\partial x} \right] = q(x) f(t).$$

$$\rho F \ddot{u} - \frac{\partial}{\partial x} \left[EF \frac{\partial u^y}{\partial x} \right] = \rho F \ddot{u}^e \left(\frac{L}{2}, t \right) \delta \left(x - \frac{L}{2} \right).$$

Тут $u^y = u^e = u$. Праву частину рівняння коливань помножено на дельта-функцію для того, щоб зосереджену змущувальну силу зобразити формально розподіленою і використати описаний вище МГК для розв'язування наведеного рівняння.

1.5.7. Випадкові вимушені поздовжні коливання стрижня

Змущувальну довільну силу вважаємо випадковою у часі та детермінованою розподіленою вздовж осі стрижня, тобто $q = q(x)f(t)$. Тоді рівняння поздовжніх коливань з урахуванням внутрішнього тертя за гіпотезою Кельвіна — Фойхта матиме вигляд:

$$\rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[EF \left(1 + b_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial u}{\partial x} \right] = q(x)f(t). \quad (1.5.7.1)$$

Нехай $f(t)$ — стаціонарна випадкова функція часу, яка має спектральну щільність $S_f(\omega)$. Через короткий проміжок часу після початку коливань перехідний процес внаслідок тертя затухає, і встановлюються вимушені стаціонарні випадкові коливання $u(x,t)$, спектральна щільність і дисперсія яких визначаються за формулами

$$S_u(x, \omega) = |W(x, \omega)|^2 S_f(\omega), \quad (1.5.7.2)$$

$$D_u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W(x, \omega)|^2 S_f(\omega) d\omega. \quad (1.5.7.3)$$

Вираз частотної передаточної функції $W(x, \omega)$ визначено формулою (1.123).

Якщо вхід $f(t)$ — нестаціонарний випадковий процес, то вихід — вимушені поздовжні коливання — є також нестаціонарним випадковим процесом. Імовірнісні характеристики останнього визначаються через імовірнісні характеристики входу за формулами:

$$m_u(x, t) = L_t(x) m_f(t); K_n(x, t_1, t_2) = L_{t_1}(x) L_{t_2}(x) K_f(t_1, t_2), \quad (1.5.7.4)$$

де m_f, K_f і m_u, K_u — математичне сподівання, кореляційна функція входу / і виходу u .

Оператор $L_t(x)$ перетворення вхідного сигналу $f(t)$ у вихідний $u(x, t)$ за тривіальних початкових умов знайдемо з детермінованого розв'язку, підставляючи в нього $q(x, \tau) = q(x)f(\tau)$:

$$u(x, t) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{U_l(x) q_l e^{-h_l t}}{M_l \omega_l} \int_0^t e^{-h_l \tau} f(\tau) \cdot \sin \tilde{\omega}_l(t - \tau) d\tau; \quad (1.5.7.5)$$

а потім відкинемо в результаті $f(\tau)$. Використовуючи оператор $L_t(x)$, у формулах (1.133) на звільнене місце ставимо задані ймовірнісні характеристики входу. За формулами (1.133) визначимо:

$$m_u(x, t) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{U_l(x) q_l e^{-h_l t}}{M_l \omega_l} \int_0^t e^{-h_l \tau} f(\tau) \cdot \sin \tilde{\omega}_l(t - \tau) d\tau;$$

$$K_u(x, t_1, t_2) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{U_l(x) U_s(x) q_l q_s e^{-h_l t_1 - h_s t_2}}{M_l M_s \omega_l \omega_s} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} e^{-h_l \tau_1 - h_s \tau_2} K_f(\tau_1, \tau_2) \cdot \sin \tilde{\omega}_l(t_2 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2;$$

$$q = \int_0^L q(x) U_l(x) dx.$$

Дисперсію $D_u(x, t)$ розв'язку знайдемо, поклавши в передостанній формулі $t_1 = t_2 = t$.

1.5.8. Метод початкових параметрів

При поздовжніх коливаннях застосовують метод початкових параметрів, коли стрижень східчастого чи постійного перерізу має кілька ділянок, і розглядаються вільні чи вимушені гармонічні коливання далеко від резонансу (якщо тертя не враховується). Алгоритм методу початкових параметрів дає змогу на заданій частоті за відомим вектором стану (переміщення і осьова сила) на початку ділянки визначити вектор стану в кінці ділянки. Розглянемо три варіанти методу.

Метод початкових параметрів у глобальній системі координат. Початок координат вибираємо загальним (на лівому кінці стрижня) для

всіх ділянок (глобальна система координат). Враховуємо тільки ті переміщення і зусилля, які розміщені між початком відліку і розглядуваним перерізом. Диференціювання та інтегрування проводиться без розкриття дужок. Додатними вважаються напрямлене в додатний бік осі переміщення і розтягальне зусилля. Межами ділянок є перерізи, на яких прикладено зосереджену силу, задане переміщення, змінюється стрибком площа перерізу тощо (рис. 1.135).

Виразимо сталі A, B рівняння (1.39) форми поздовжніх коливань через початкові параметри — осьове переміщення $U(0)$ та зусилля $N(0)$:

$$U(x) = U(0) \cos kx + \frac{N(0)}{kEF} \sin kx. \quad (1.5.8.1)$$

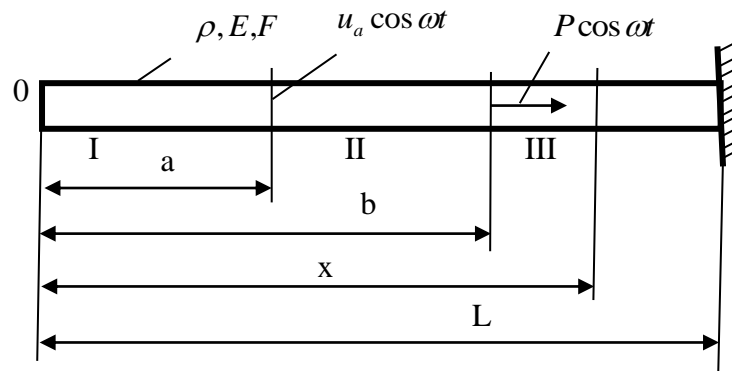


Рис. 1.5.8.1 14. Стрижень з кількома ділянками

До цього виразу на ділянці II приєднується доданок від U_a , а на ділянці III — від P . Дістанемо універсальне рівняння амплітудних переміщень на останній ділянці стрижня:

$$U(x) = U(0) \cos kx + \frac{N(0)}{kEF} \sin kx \Big|_I + U_a \cos k(x-a) \Big|_{II} - \frac{P}{kEF} \sin k(x-b) \Big|_{III} \quad (1.5.8.2)$$

Продиференціювавши (без розкриття дужок) і помноживши на EF матимемо друге універсальне рівняння для осової сили:

$$N(x) = -EFkU(0) \sin kx + N(0) \cos kx \Big|_I - EFkU_a \sin k(x-a) \Big|_{II} - P \cos k(x-b) \Big|_{III} \quad (1.5.8.3)$$

Початкові параметри визначаються з двох граничних умов.

Метод початкових параметрів у формі Коші. Початок координат вибираємо на початку кожної ділянки (локальна система відліку, рис. 9.15). Запишемо рівняння для U і N кожній ділянці:

$$\left. \begin{aligned} U_1(x_1) &= U_1(0) \cos kx_1 + \frac{N_1(0)}{kEF_1} \sin kx_1 \\ N_1(x_1) &= -EF_1 k U_1(0) \sin kx_1 + N_1(0) \cos kx_1 \end{aligned} \right\} \quad (1.5.8.4)$$

$$\left. \begin{aligned} U_2(x_2) &= U_2(0) \cos kx_2 + \frac{N_2(0)}{kEF_2} \sin kx_2 \\ N_2(x_2) &= EF_2 k U_2(0) \sin kx_2 + N_2(0) \cos kx_2 \end{aligned} \right\} \quad (1.5.8.5)$$

До цих рівнянь приєднуємо граничні умови і умови спряження ділянок

$$U_1 = 0; \quad N_2(L_2) = 0, \quad (1.5.8.6)$$

$$U_1(L_1) = U_2(0); \quad EF_1 \frac{dU_1(L_1)}{dx_1} = EF_2 \frac{dU_2(0)}{dx_2}, \quad (1.5.8.7)$$

або в матричному вигляді

$$\begin{Bmatrix} U_2 \\ N_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ N_1 \end{Bmatrix},$$

де $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ — матриця переходу.

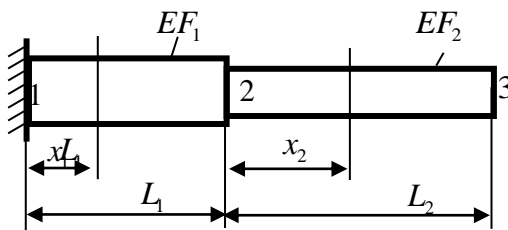


Рис. 1.5.8.1 15. Східчастий стрижень на межі ділянок стрижня

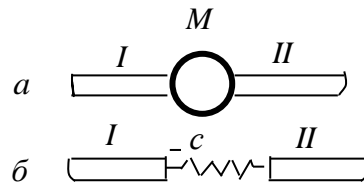


Рис. 1.5.8.2 16. Розміщення маси (а) і пружини (б)

Трапляються й інші види умов спряження, наприклад для зосереджених на межі ділянок маси чи пружини (рис. 1.15):

$$U_2 = U_1; \quad EF_2 U_2^1 - EF_1 U_1^1 = M \omega^2 U_1;$$

$$c(U_2 - U_1) = EF_1 U_1^1 = EF_2 U_2^1.$$

Цим умовам спряження відповідають такі матриці переходу через масу чи пружину (див. наступний розділ):

$$M_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -M\omega^2 & 1 \end{bmatrix}; \quad M_{21} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{c} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Метод початкових параметрів у матричному вигляді (без системи відліку). Запишемо формули (1.138), (1.139) для перерізів, які є межами ділянок (див. рис. 9.15, точки 1, 2, 3), у вигляді співвідношень між числовими матрицями:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} U_2 \\ N_2 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos kL_1 & \frac{1}{EF_1k} \sin kL_1 \\ -EF_1k \sin kL_1 & \cos kL_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ N_1 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} U_3 \\ N_3 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos kL_2 & \frac{1}{EF_1k} \sin kL_2 \\ -EF_2k \sin kL_2 & \cos kL_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ N_2 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (1.5.8.7)$$

Позначимо вектор стану x_i , матрицю переходу (передатна матриця) M_{jk} і запишемо формули (1.143) у вигляді

$$X_2 = M_{21}X_1; \quad X_3 = M_{32}X_2; \quad X_3 = M_{32}M_{21}X_1. \quad (1.5.8.8)$$

Отже, перехід від перерізу до перерізу здійснюється множенням матриці переходу на вектор стану. Весь перехід від лівого до крайнього правого перерізу зображують добутком усіх передатних матриць на початкове значення вектора стану. При вільних коливаннях початковий вектор стану відомий з точністю до множника. Переваги методу початкових параметрів у матричному вигляді виявляються у випадку великої кількості ділянок стрижня.

Приклад 5. Визначити власні частоти поздовжніх коливань східчастого стрижня (див. рис. 1.135).

Розв'язання. Головні вільні коливання стрижня, частоти яких потрібно знайти, є гармонічними. Тому можна скористатися методом початкових параметрів, наприклад у матричному вигляді. Вектори стану в перерізах 1 і 3 з урахуванням граничних умов ($U_1 = 0; N_3 = 0$) матимуть вигляд

$$X_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ N_{10} \end{Bmatrix}; \quad X_3 = \begin{Bmatrix} U_3 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.5.8.9)$$

де N_{10} — задане початковою умовою значення сили в перерізі $x = 0$. Воно може бути довільним $N_{10} = 1$, якщо початкові умови не задані. Підставимо (1.145) в (1.144) і знайдемо:

$$\begin{bmatrix} \cos kL_1 & \frac{1}{EF_1k} \sin kL_1 \\ -EF_1k \sin kL_1 & \cos kL_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos kL_1 & \frac{1}{EF_1k} \sin kL_1 \\ -EF_1k \sin kL_1 & \cos kL_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_3 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Перемноживши матриці, матимемо два рівняння: одне для U_3 , друге (вікове) — для k . Останнє має вигляд

$$\operatorname{tg} kL_1 \operatorname{tg} kL_2 = \frac{F_1}{F_2} \quad (1.5.8.10)$$

Визначивши звідси хвильові числа k , частоти обчислимо за формулою (1.38).

Розв'язуючи задачі про вимушені гармонічні коливання, використовують також матричні співвідношення, але в них частота ω і хвильове число k уже задані. Крім того, відома амплітуда силового $N_3 = P$, чи кінематичного збудження $U_3 = V$. Потрібно визначити амплітуди всіх інших переміщень і зусиль. В резонансному випадку слід додатково враховувати частотно-незалежне чи частотно-залежне внутрішнє тертя, замінюючи модуль пружності на відповідні комплексні вирази $E(1 + \alpha_1 i)$ або $E(1 + b_1 \omega i)$.

З отриманих комплексно-значних матричних співвідношень визначимо комплексні амплітуди сил і переміщень — компоненти вектора стану. З останніх знаходимо дійсні амплітуди коливань і фази коливань.

1.6. Крутильні коливання стрижнів

Виведення диференціального рівняння крутильних коливань круглого стрижня змінного перерізу з прямою віссю. В круглому стрижні центр ваги будь-якого перерізу збігається із центром згину і тому можливі суто

крутильні коливання стрижня. Вважаємо справедливою гіпотезу плоских перерізів. Виникають тільки дотичні напруження $\tau_{12} = \tau_{21}$; $\tau_{13} = \tau_{31}$, рівнодійна яких напрямлена перпендикулярно до діаметра перерізу. Задача є геометрично і фізично лінійною. Сформульовані припущення дають можливість описати процес крутильних коливань однією одновимірною функцією $\varphi(x, t)$ — кутом кручення.

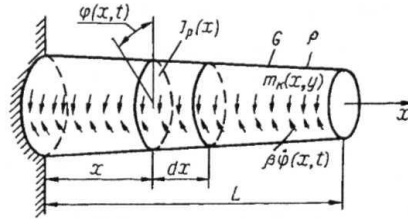


Рис. 1.6.1 17.. Розрахункова схема птрижня при крутильних коливаннях

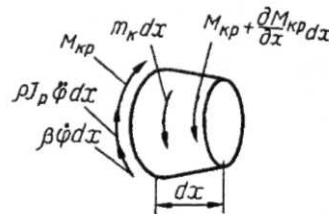


Рис. 1.6.2 18. Схема крутильних зусиль

Відносна деформація — кут зсуву дорівнює

$$\gamma = r \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

де r — віддаль від осі кручення до точки перерізу стрижня, що розглядається.

Цій деформації за законом Гука, гіпотезою Кельвіна — Фойхта чи гіпотезою Сорокіна відповідають напруження:

$$\tau = G\gamma = Gr \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad \tau = G(1 + b_1)r \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad \tau = G(1 + \alpha_{ii})r \frac{\partial \varphi}{\partial x};$$

крутні моменти в поперечному перерізі (рис. 1.18):

$$M_{kp.} = \iint_{(F)} \tau r dF = G \frac{\partial \varphi}{\partial x} \iint_{(F)} \tau^2 dF = Gr_p \frac{\partial \varphi}{\partial x};$$

$$M_{kp} = GJ_p \left(1 + b_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) r \frac{\partial \varphi}{\partial x};$$

$$M_{kp} = GJ_p(1 + \alpha_1 i) r \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (1.6.1)$$

Додаючи за принципом Д'Аламбера до зусиль, що діють на елемент dx коливального стрижня, сили інерції — $\rho J_p \ddot{\varphi} dx$ і сили в'язкого тертя середовища $b_2 \rho J_p \dot{\varphi} dx$, матимемо умову динамічної рівноваги елемента (рис. 1/18):

$$M_{kp} = GJ_p \ddot{\varphi} dx + b_2 J_p \dot{\varphi} = M_{kp} + \frac{\partial M_{kp}}{\partial x} dx + m_k(x, t) dx.$$

Підставляючи сюди (1.146), дістанемо рівняння вимушених крутильних коливань відповідно пружного, в'язко-пружного і недосконало пружного стрижня круглого змінного перерізу з урахуванням зовнішнього в'язкого тертя:

$$\rho J_p \ddot{\varphi} + \rho J_p b_2 \dot{\varphi} - \frac{\partial}{\partial x} \left(GJ_p \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = m_k(x, t) \quad (1.6.2)$$

$$\rho J_p \ddot{\varphi} + \rho J_p b_2 \dot{\varphi} - \frac{\partial}{\partial x} \left[GJ_p \left(1 + b_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] = m_k(x, t) dx \quad (1.6.3)$$

$$\rho J_p \ddot{\varphi} + \rho J_p b_2 \dot{\varphi} - \frac{\partial}{\partial x} \left[GJ_p (1 + \alpha_1 i) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] = m_k(x, t) dx \quad (1.6.4)$$

де G — модуль зсуву; J_p — полярний момент інерції перерізу стрижня; i — уявна одиниця; $m_k(x, t)$ — інтенсивність зовнішнього моментного навантаження.

Вивчаючи нестационарні коливання (вільні, випадкові, перехідні тощо) замість оператора i слід застосовувати оператор Бока — Шліппе — Колара $[\omega]^{-2} \frac{\partial}{\partial t}$

З порівняння виразів (1.147)—(1.149) і (1.15)—(1.17) бачимо, що вони відрізняються лише позначеннями, і задача про крутильні коливання математично тотожна задачі про поздовжні коливання стрижня. Всі інші результати для крутильних коливань будуть аналогічними результатам для поздовжніх коливань.

1.7. Поперечні коливання струни

Виведення диференціального рівняння поперечних коливань струни. Струна — це тонке пружне одновимірне тіло з незначною жорсткістю на згинання і стискання (рис. 1.150), якою можна знехтувати. Натяг струни $T(x)$ вважаємо незалежним від часу при її поперечних коливаннях $v = v(x, t)$. Інтенсивність поперечного навантаження позначимо $c(x)$, інтенсивність сили опору середовища — $b_2 \rho F \dot{v}$. Задачу розглядаємо в геометрично лінійній побудові, коли

$$\cos \alpha = 1, \quad \sin \alpha = \frac{\partial v}{\partial x}$$

Спроекціюємо на вісь v сили, що діють на елемент dx струни при її коливаннях, а також д'аламберові сили інерції $\rho F \ddot{v} dx$ (рис. 1.150, б) та сили тертя:

$$(-\rho F \ddot{v} - b_2 \rho F \dot{v} - q) dx \cos \alpha - T \sin \alpha + \left(T + \frac{\partial T}{\partial x} dx \right) \sin \left(\alpha + \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx \right) = 0$$

Нехтуючи малими другого порядку і враховуючи:

$$\frac{\partial T}{\partial x} \alpha + T \frac{\partial \alpha}{\partial x} (T \alpha), \quad \alpha = \frac{\partial v}{\partial x}$$

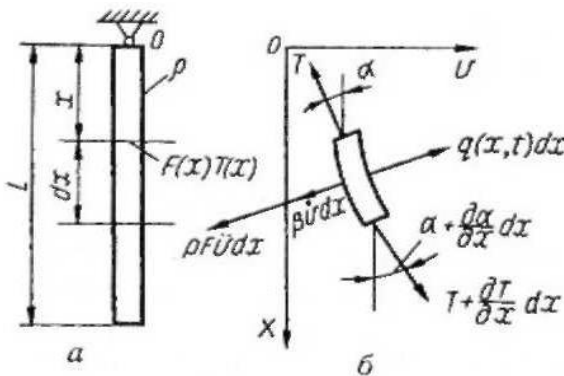


Рис. 1.7.1 19. Закріплена одним кінцем струна (а) і схема зусиль (б), які діють на її елемент при поперечних коливаннях матимемо

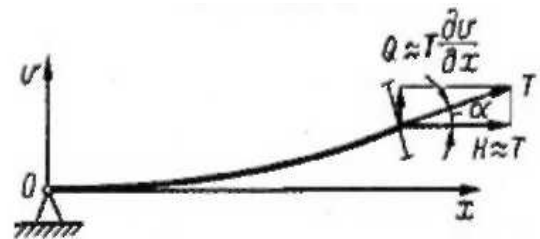


Рис. 1.7.2 20. Схема внутрішніх зусиль в перерізі струни

$$\rho F \ddot{v} + b_2 \rho F \dot{v} - \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial v}{\partial x} \right) = q(x, t) \quad (1.7.1)$$

рівняння поперечних коливань ідеально пружної струни з урахуванням зовнішнього в'язкого тертя. До рівняння (1.150) приєднуємо дві граничні та дві початкові умови.

Однорідні граничні умови: 1) на вільному кінці поперечна сила дорівнює нулю $Q = T \frac{\partial v}{\partial x} = 0$, на закріпленому кінці поперечне переміщення ax дорівнює нулю $v = 0$ (рис. 1.150).

Якщо на кінці прикладена зосереджена маса M або зосереджена пружина з коефіцієнтом жорсткості c (пружне закріплення), то граничні умови неоднорідні:

$$T \frac{\partial v}{\partial x} = \pm M \ddot{v}, \quad T \frac{\partial v}{\partial x} = \pm c v. \quad (1.7.2)$$

Внутрішнє в'язке або частотно-незалежне тертя в струні враховуємо за принципом відповідності рівнянь, помноживши натяг струни (що спричинив пружні сили) на оператори $\left(1 + b_1 \frac{\partial}{\partial t}\right), \left(1 + \alpha_1 [\omega]^{-1} \frac{\partial}{\partial t}\right)$

Отже, рівняння поперечних коливань струни за виглядом подібні до рівнянь поздовжніх коливань стрижня. У випадку підвішеної струни натяг від власної ваги дорівнює $T(x) = pg(L - x)$.

Вільні коливання струни без урахування тертя. Для струни змінного перерізу рівняння таких коливань має вигляд:

$$\rho F \ddot{v} - \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0. \quad (1.7.3)$$

Шукаючи розв'язок за методом Фур'є:

$$v = V(x) \cos \omega t,$$

приходимо до звичайного рівняння для власних форм коливань

$$\frac{d}{dx} \left(T \frac{dV}{dx} \right) + \rho F \omega^2 V = 0.$$

Якщо струна однорідна і має постійні перерізи, то рівняння вільних коливань набуває вигляду хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0,$$

де $c_0^2 = \frac{T_0}{\rho F}$; c_0 — фазова швидкість.

Відповідне рівняння для власних форм коливань

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\omega^2}{c_0^2} V = 0; \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2}$$

має розв'язок вигляду (1.4.9). За граничних умов $V(0) = V(L) = 0$ він дає такі формули для форми коливань і частоти:

$$V_2(x) = \sin k_l x; \quad \omega_l^2 = k_l^2 \frac{T}{\rho F}; \quad k_l = \frac{l\pi}{L}.$$

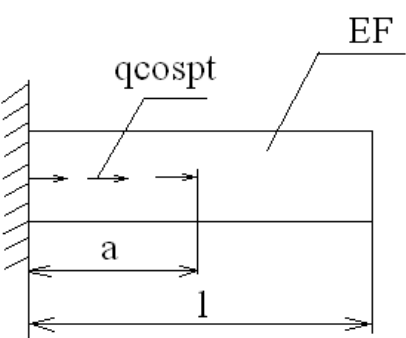
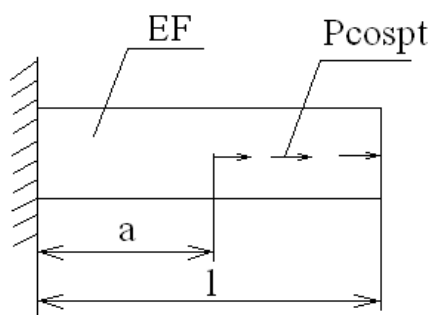
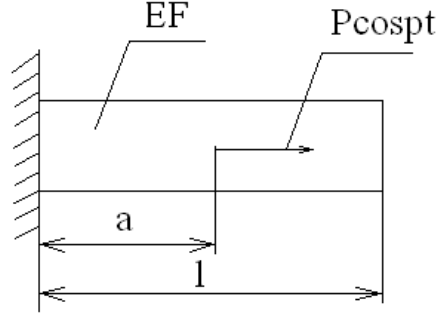
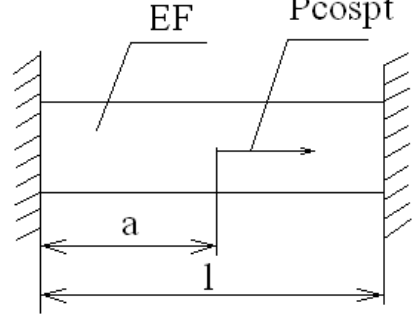
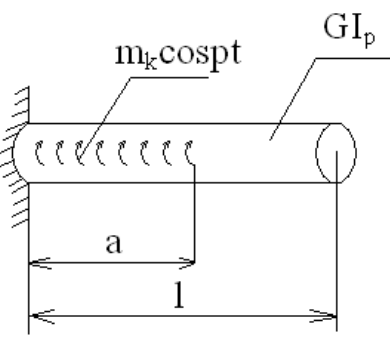
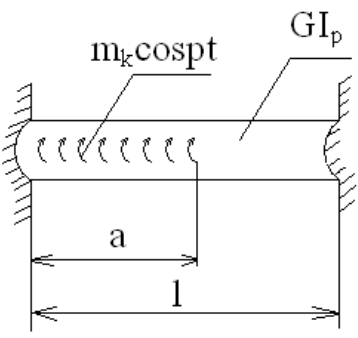
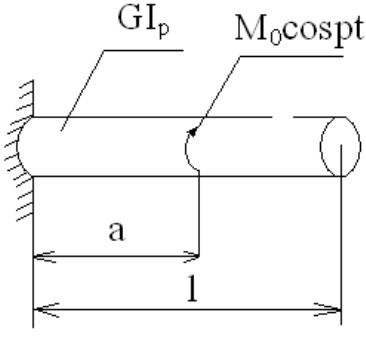
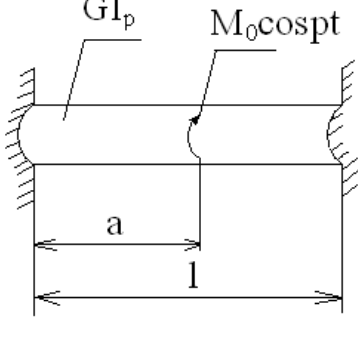
Задача 3. Коливання системи з розподіленими параметрами.

План розв'язку задачі

1. Записати диференціальне рівняння вільних коливань і граничних умов.
2. Знайти власні функції і власні частоти.
3. Знайти розв'язок задачі про вимушені коливання за допомогою дії гармонічної сили, враховуючи розсіювання енергії по гіпотезі Кельвіна-Фойхта, Сорокіна або лінійно-гістерезисній гіпотезі (гіпотезі Бока-Шліппе).
4. Знайти основну власну частоту методом Релея-Рітца у другому наближенні в системі простої балки з вантажем або простої плити з вантажем в першому наближенні.

Варіанти задач вибирають згідно з двозначним шифром одночасно із рис. 10,11, а з табл. 8 – числові дані.

Шифр	k	n	$\frac{m_o}{m}$	$\frac{a}{l}$	M	M_0	Гіпотеза врахування розсіювання енергії
0	1	2	2	0,5	ml	ρha^2	Фойхта
1	2	1	3	0,4	$2ml$	ρha^2	Сорокіна
2	3	2	2	0,3	ml	$2\rho ha^2$	Бока- Шліппе
3	4	1	3	0,6	$2ml$	ρha^2	Фойхта
4	1	2	2	0,7	ml	$2\rho ha^2$	Сорокіна
5	2	1	3	0,3	$2ml$	ρha^2	Бока- Шліппе
6	3	2	2	0,4	ml	$2\rho ha^2$	Фойхта
7	4	1	3	0,5	$2ml$	ρha^2	Сорокіна
8	1	2	2	0,6	ml	$2\rho ha^2$	Бока- Шліппе
9	2	1	3	0,4	$2ml$	ρha^2	Фойхта

<p>0</p> 	<p>5</p> 
<p>1</p> 	<p>6</p> 
<p>2</p> 	<p>7</p> 
<p>3</p> 	<p>8</p> 

Крутильні коливання однорідного стрижня постійного поперечного перерізу.

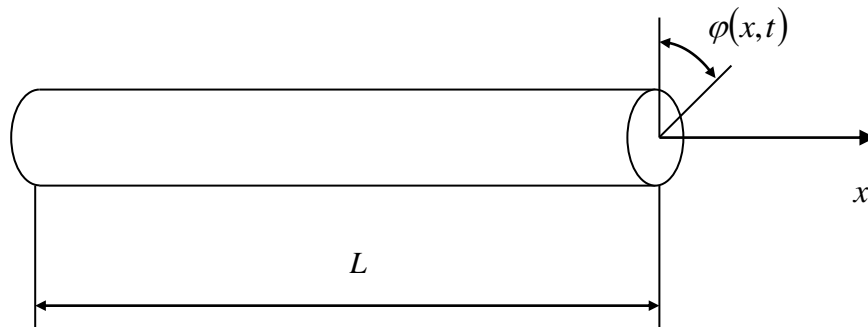


Рис.1

Круглий стрижень (вал) має вільні краї (рис.1). Для нього граничні умови мають вигляд

$$\frac{d\Phi(0)}{dx} = \frac{d\Phi(L)}{dx} = 0 \quad (\text{при } x=0; x=L) \quad (1)$$

Диференціальне рівняння вільних крутильних коливань має вигляд хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (2)$$

де $c_0 = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ фазова швидкість крутильної біжучої хвилі.

Частинні розв'язки хвильового рівняння шукаємо у вигляді головних коливань

$$\varphi(x, t) = \Phi_l(x) \eta_l(t) = \Phi_l(x) \eta_l(t) \cos(\omega_l t - \varphi_l). \quad (3)$$

Підставимо (3) в (2), отримаємо звичайне диференціальне рівняння для власних форм крутильних коливань

$$\frac{\partial^2 \Phi_l}{\partial x^2} + k_l^2 \Phi_l = 0$$

де $k_l = \frac{\omega_l}{c_0} = \omega_l \sqrt{\frac{\rho}{I_m}}$ – хвильове число; $I_m = \rho F$ момент інерції маси поперечного перерізу одиничної товщини.

Загальним розв'язком рівняння (4) для власних форм крутильних коливань буде

$$\Phi_l = A_l \cos k_l x + B_l \sin k_l x$$

Тут невідоме значення постійних A_l , B_l с хвильового числа. Але є тільки дві граничні умови (1). Підставимо рівняння (6) в (1) будемо мати

$$B_l = 0; A_l \sin k_l x = 0. \quad (7)$$

Оскільки $A_l \neq 0$, тому

$$\sin k_l x = 0. \quad (8)$$

Це є частинне рівняння, з якого визначаємо безрозмірні характеристичні числа

$$k_l L = 0, \pi, 2\pi, \dots \quad (9)$$

і хвильові числа

$$k_l = 0, \frac{\pi}{L}, \frac{2\pi}{L}, \dots \quad (10)$$

Підставимо значення постійної і хвильового числа в (6), маємо вираз для власної форми крутильних коливань

$$\Phi_l = A_l \cos \frac{l\pi}{L} x,$$

в якому приймаємо $A_l = 1$, обидві граничні умови (1) вже використані, а можна взяти довільним. Таким чином, власна форма коливань описується формулою

$$\Phi_l = \cos \frac{l\pi}{L} x, \quad (11)$$

якій відповідає згідно (5) власна частота

$$\omega_l = \frac{l\pi}{L} \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (12)$$

При $l = 0$ маємо $\omega_0 = 0$; $\Phi_0 = 1$ - тривіальне значення частоти і постійної величини для власної форми, що характеризує крутильний рух без деформації.

Система з тривіальним значенням власних частот називається навіл визначеною (незакріпленою).

При $l = 1$; маємо $\omega_1 = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{G}{\rho}}$; $\Phi_1 = \cos \frac{\pi}{L} x$ - форма коливань з півхвилею деформації кручення.

При $l = 2$; маємо $\omega_2 = \frac{2\pi}{L} \sqrt{\frac{G}{\rho}}$; $\Phi_2 = \cos \frac{2\pi}{L} x$ - форма коливань з повною хвилею деформації кручення.

Взагалі - частота буде кратна до частоти . Перші хвилі представлені на рис.2

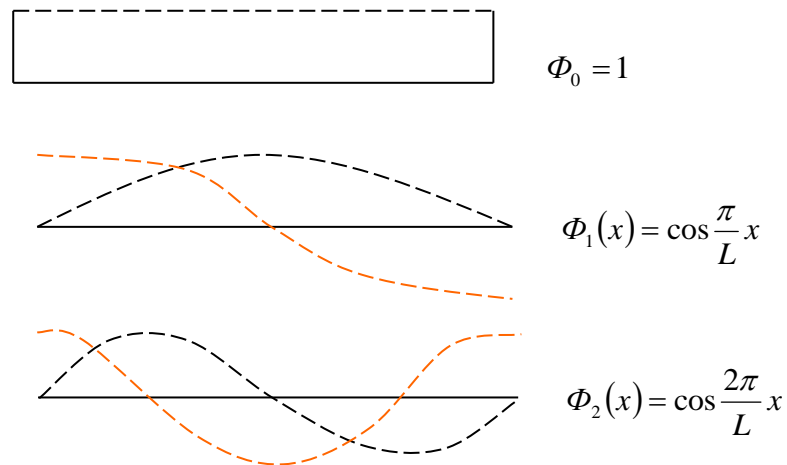
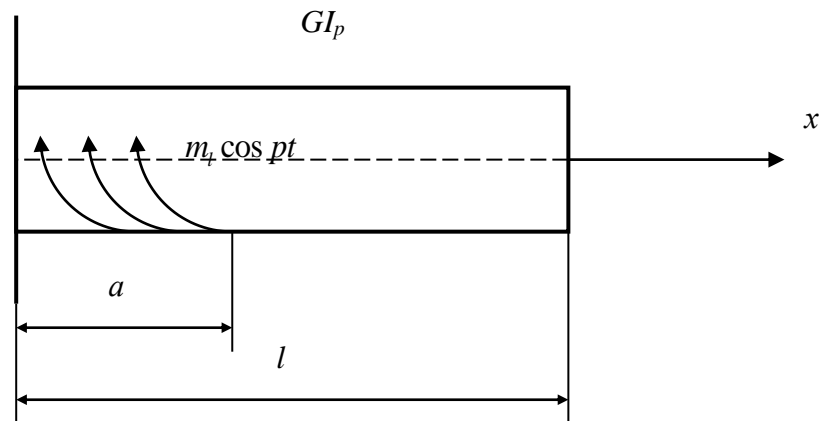


Рис.2 Форми коливань

Обчислити I_p , $I_m = \rho F$; k_l форми коливань, власні частоти для $l = 0, 1, 2, 3$ згідно з власним варіантом завдання.



Дано: $a = 0,3l$.

Диференціальне рівняння рівноваги запишемо у вигляді:

$$G \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = m \sigma (x-a) \cos pt. \quad (1)$$

Розв'язок будемо шукати у вигляді:

$$\varphi(x, t) = \sum_{l=1}^{\infty} \varphi_l(x) f_l(t). \quad (2)$$

$\varphi_l(x)$ - власна форма коливань, що визначається з граничних умов.

Граничні умови:

$$\varphi_l(0) = 0; \quad GI_p \frac{\varphi_l(a)}{dx} = m.$$

Розв'язок шукаємо у вигляді:

$$\varphi_l(x) = A \cos k_l x + B \sin k_l x.$$

Із першої граничної умови витікає:

$$A \cdot 1 + B \cdot 0 = 0; \quad A = 0.$$

Із другої граничної умови маємо:

$$\varphi'_l(x) = k_l (-A \sin k_l x + B \cos k_l x).$$

$$GI_p k_l B \cos k_l a = m; \quad k_l = \frac{M^2 p}{G}.$$

$$B = \frac{mG}{M^2 p GI_p \cos k_l a} = \frac{m}{M^2 p I_p \cos k_l a}.$$

Отже форма коливань має вигляд:

$$\varphi_l(x) = \frac{m}{M^2 p I_p \cos k_l a} \sin k_l x.$$

Підставляємо (2) в (1) маємо:

$$\rho \sum_{l=1}^{\infty} \varphi_l(x) \ddot{f}_l(t) - G \sum_{l=1}^{\infty} \frac{d^2 \varphi_l(x)}{dx^2} f_l(t) = m \sigma (x-a) \cos pt.$$

Визначимо другу похідну від $\varphi_l(x)$ по x :

$$\frac{d^2 \varphi_l(x)}{dx^2} + k_l^2 \varphi_l(x) = 0; \quad k_l = \frac{\omega_l^2}{C_0^2}.$$

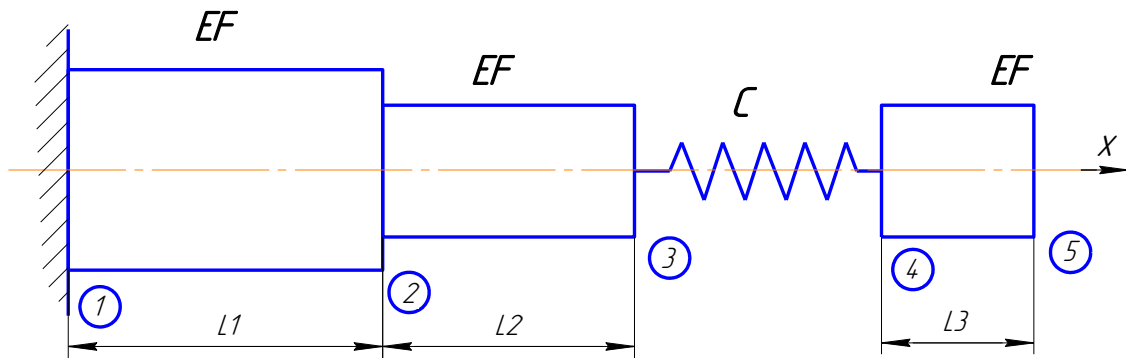
Тоді розв'язок (2) приймає такий вигляд:

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) &= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{m}{M^2 p I_{\rho} \cos k_l a} \sin k_l x \frac{\frac{I_{\rho} m G}{M^2 \rho} \left(\cos \frac{M^2 \rho}{G} a - \cos \frac{M^2 \rho}{G} l \right)}{\frac{I_{\rho} m E}{M^2 \rho I_{\rho} \cos \frac{M^2 \rho}{G} l} \left(\frac{l}{2} - \frac{G}{4 M^2 \rho} \sin \frac{M^2 \rho}{G} l \right) (\omega_l^2 - \rho^2)} = \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{m G}{M^2 p} \frac{\cos \frac{M^2 \rho}{G} a - \cos \frac{M^2 \rho}{G} l}{\left(\frac{l}{2} - \frac{G}{4 M^2 \rho} \sin \frac{M^2 \rho}{G} l \right) (\omega_l^2 - \rho^2)} \sin \frac{M^2 \rho}{G} x \cos p t. \end{aligned}$$

Метод початкових параметрів для поздовжніх коливань ступінчастих стержнів

При поздовжніх коливаннях застосовують метод початкових параметрів, коли стрижень східчастого чи постійного перерізу має кілька ділянок, і розглядаються вільні чи вимушені гармонічні коливання далеко від резонансу (якщо тертя не враховується). Алгоритм методу початкових параметрів дає змогу на заданій частоті за відомим вектором стану (переміщення і осьова сила) на початку ділянки визначити вектор стану в кінці ділянки.

<p>0</p> <p>nEF EF $C = \frac{nEF}{L_1}$</p> <p>L_1 L_2 $L_3 = 0$</p>	<p>5</p> <p>EF $C = \frac{nEF}{L_3}$ nEF</p> <p>L_1 $L_2 = 0$ L_3</p>
<p>1</p> <p>nEF EF M</p> <p>L_1 L_2</p>	<p>6</p> <p>EF nEF $C = \frac{nEF}{L_2}$</p> <p>L_1 L_2 $L_3 = 0$</p>
<p>2</p> <p>nEF EF M</p> <p>L_1 L_2 $L_3 = 0$</p>	<p>7</p> <p>$C = \frac{EF}{L_2}$ nEF $C = \frac{EF}{L_2}$</p> <p>$L_1 = 0$ L_2 L_3</p>
<p>3</p> <p>nEF $C = \frac{nEF}{L_2}$ EF</p> <p>L_1 $L_2 = 0$ L_3</p>	<p>8</p> <p>M_0 $C = \frac{EF}{L_3}$</p> <p>$L_1 = 0$ $L_2 = 0$ L_3</p>



$$F_1 = 3F; \quad F_2 = 2F; \quad F_3 = F; \quad c = \frac{EF}{2L}$$

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа};$$

$$L_1 = 0,2 \text{ м} = 4L; \quad L_2 = 0,1 \text{ м} = 2L; \quad L_3 = 0,05 \text{ м} = L.$$

$$M_{54} = \begin{pmatrix} \cos kb & \frac{1}{EF_2 k} \sin kb \\ -EF_2 k \sin kb & \cos kb \end{pmatrix};$$

$$M_{43} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; M_{32} = \begin{pmatrix} \cos kb & \frac{1}{EF_2 k} \sin kb \\ -EF_2 k \sin kb & \cos kb \end{pmatrix};$$

$$M_{21} = \begin{pmatrix} \cos kb & \frac{1}{EF_1 k} \sin kb \\ -EF_1 k \sin kb & \cos kb \end{pmatrix}$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} U_1 \\ N_1 \end{pmatrix}; X_5 = \begin{pmatrix} U_5 \\ N_5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} U_1 \\ N_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X_5 = M_{54} M_{43} M_{32} M_{21} X_1$$

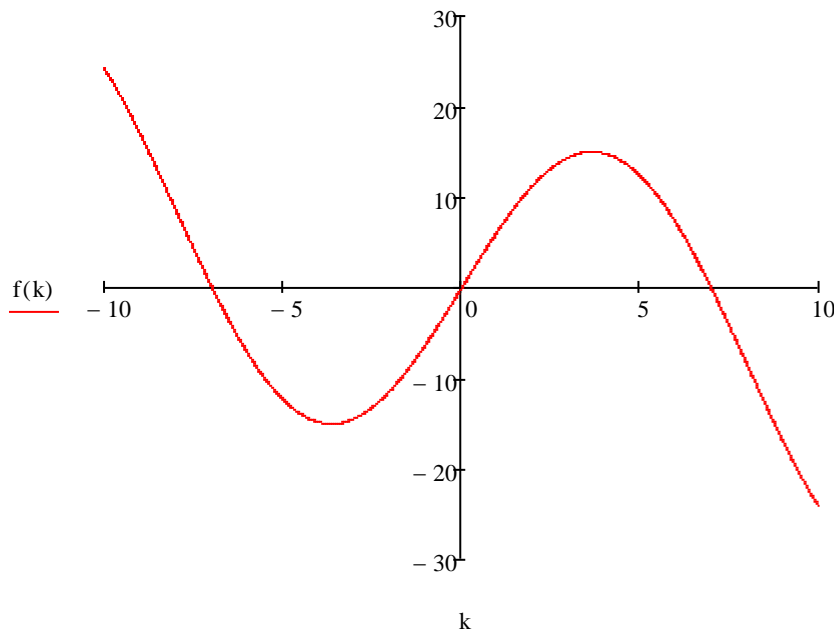
Отже, перехід від перерізу до перерізу здійснюється множенням матриці переходу на вектор стану. Весь перехід від лівого до крайнього правого перерізу зображують добутком усіх передатних матриць на початкове значення вектора стану. При вільних коливаннях початковий вектор стану відомий з точністю до множника. Переваги методу початкових параметрів у матричному вигляді виявляються у випадку великої кількості ділянок стрижня

$$\begin{pmatrix} U_5 \\ N_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 4kL \cdot \left(\cos 2kL \cdot \left(\frac{\sin kL}{EFk} + \frac{2L \cos kL}{EF} \right) + \frac{\cos kL \cdot \sin 2kL}{2EFk} \right) + \\ \cos 4kL \cdot (\cos 2kL \cdot (\cos kL - 2kL \cdot \sin kL)) - \\ \sin 4kL \cdot \left[\cos kL \cdot \cos 2kL - 2EFk \cdot \sin 2kL \cdot \left(\frac{\sin kL}{EFk} + \frac{2L \cdot \cos kL}{EF} \right) \right] \\ + \frac{\sin 4kL \cdot [2EFk \cdot \sin 2kL \cdot (\cos kL - 2kL \cdot \sin kL) + EFk \cdot \cos 2kL \cdot \sin kL]}{3EFk} \end{pmatrix}$$

$$U_5 = \cos 4kL \cdot \left(\cos 2kL \cdot \left(\frac{\sin kL}{EFk} + \frac{2L \cos kL}{EF} \right) + \frac{\cos kL \cdot \sin 2kL}{2EFk} \right) + \\ \sin 4kL \cdot \left[\cos kL \cdot \cos 2kL - 2EFk \cdot \sin 2kL \cdot \left(\frac{\sin kL}{EFk} + \frac{2L \cdot \cos kL}{EF} \right) \right] \\ + \frac{\sin 4kL \cdot [2EFk \cdot \sin 2kL \cdot (\cos kL - 2kL \cdot \sin kL) + EFk \cdot \cos 2kL \cdot \sin kL]}{3EFk}$$

$$N_5 = \cos 4kL \cdot (\cos 2kL \cdot (\cos kL - 2kL \cdot \sin kL)) - \\ \frac{\sin 4kL \cdot [2EFk \cdot \sin 2kL \cdot (\cos kL - 2kL \cdot \sin kL) + EFk \cdot \cos 2kL \cdot \sin kL]}{3EFk}$$

$$f(k) = \sin(3Lk) - 3\sin(Lk) - 5\sin(5Lk) + 15\sin(7Lk) + 4Lk \cdot \cos(Lk) + \\ + 4Lk \cdot \cos(3Lk) + 20Lk \cdot \cos(5Lk) + 20Lk \cdot \cos(7Lk)$$



З отриманих комплексно-значних матричних співвідношень визначимо комплексні амплітуди сил і переміщень — компоненти вектора стану. З останніх знаходимо дійсні амплітуди коливань і фази коливань.

$$k = 7$$

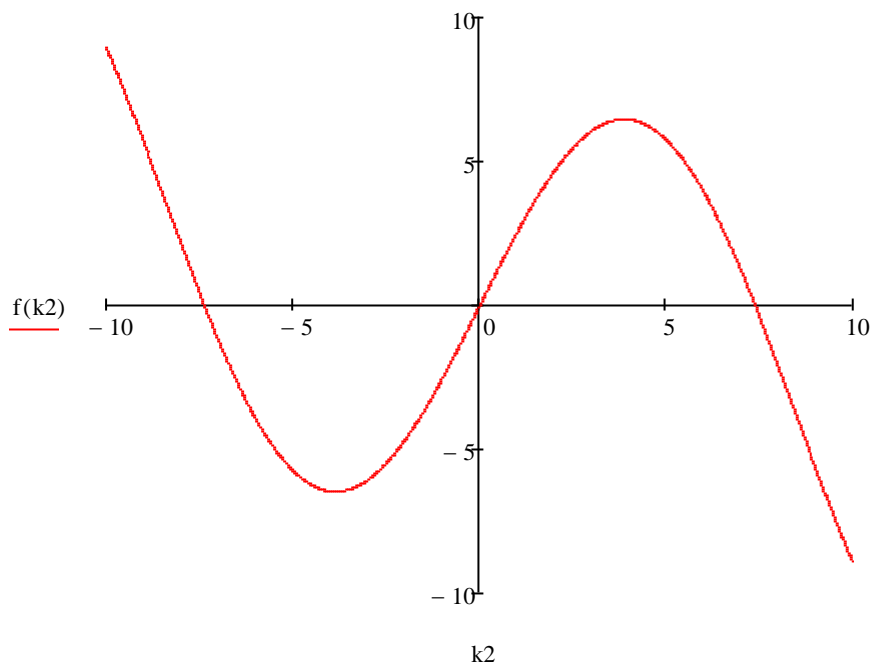
$$N_5 = -0.31$$

$$\begin{pmatrix} U_5 \\ N_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.31 \end{pmatrix}$$

$$X_4 = M_{43} M_{32} M_{21} X_1$$

$$\begin{pmatrix} U_4 \\ N_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 4kL \cdot \left(\cos 2kL \cdot \left(\frac{\sin 2kL}{2EFk} + \frac{2L \cos 2kL}{EF} \right) + \frac{\sin 4Lk \cdot (\cos 2Lk - 4Lk \cdot \sin 2Lk)}{3EFk} \right) \\ \cos 2kL \cdot \cos 4kL - \frac{2 \cdot \sin 2Lk \cdot \sin 4Lk}{3} \end{pmatrix}$$

$$f(k2) := 5 \cdot \sin(6 \cdot L \cdot k2) - \sin(2 \cdot L \cdot k2) + 4 \cdot L \cdot k2 \cdot \cos(2 \cdot L \cdot k2) + 20 \cdot L \cdot k2 \cdot \cos(6 \cdot L \cdot k2)$$



$$k = 7.38$$

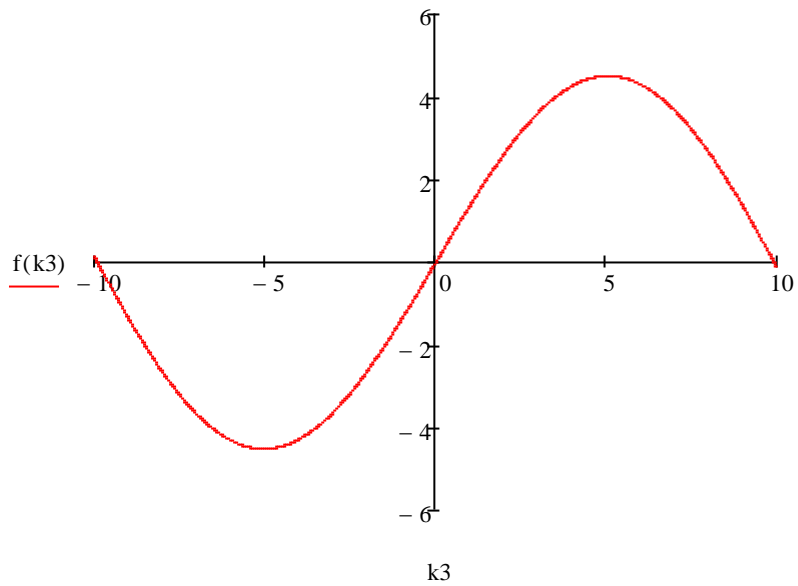
$$N_4 = -0.376$$

$$\begin{pmatrix} U_4 \\ N_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.376 \end{pmatrix}$$

$$X_3 = M_{32} M_{21} X_1$$

$$\begin{pmatrix} U_3 \\ N_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\cos 2kL \cdot \sin 4kL}{3EFk} + \frac{\cos 4Lk \cdot \sin 2Lk}{2EFk} \\ \cos 2kL \cdot \cos 4kL - \frac{2 \cdot \sin 2Lk \cdot \sin 4Lk}{3} \end{pmatrix}$$

$$\textcolor{green}{f(k3)} := -(\sin(2 \cdot L \cdot k3) - 5 \cdot \sin(6 \cdot L \cdot k3))$$



$$k = 9.91$$

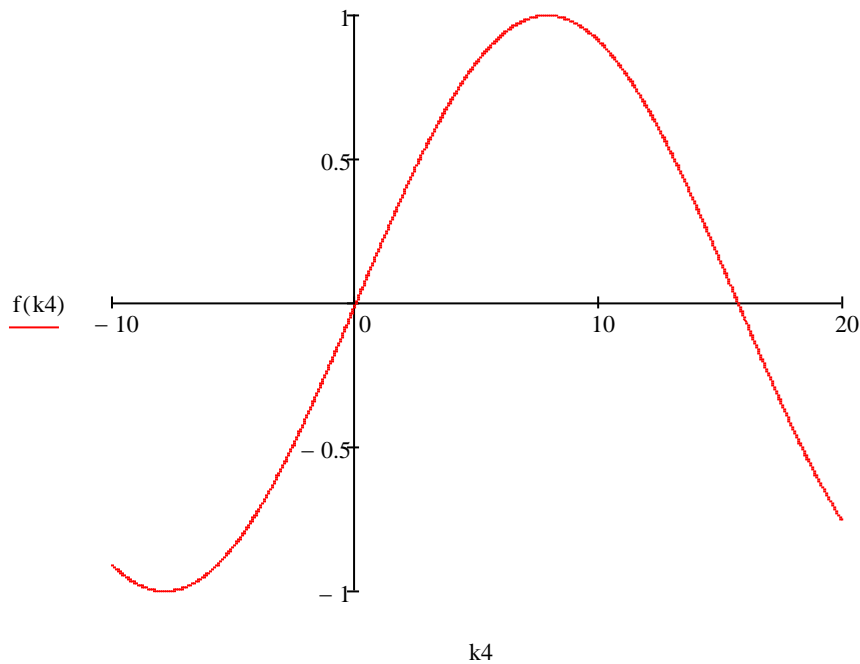
$$N_3 = -0.73$$

$$\begin{pmatrix} U_3 \\ N_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.73 \end{pmatrix}$$

$$X_2 = M_{21} X_1$$

$$\begin{pmatrix} U_2 \\ N_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sin 4kL}{3EFk} \\ \cos 4kL \end{pmatrix}$$

$$f(k4) := \sin(4 \cdot L \cdot k4)$$



$$k = 15.74$$

$$N_2 = -1$$

$$\begin{pmatrix} U_2 \\ N_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

. Задачі на коливання систем з розподіленими параметрами

Задачі на малі вільні коливання струни

6.10.1 Скласти диференційне рівняння малих коливань струни, що знаходиться під дією розподіленого навантаження (q – навантаження на одиницю довжини) (рис. 6.10.1). Натяг струни T_0 , маса одиниці її довжини m_0 (при складанні рівняння рахувати, що натяг T_0 залишається сталим).

Відповідь: $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{T_0}{m_0} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{g}{m_0}$.

6.10.2 Визначити частоти власних коливань струни та швидкість розповсюдження поперечних переміщень (силою тяжіння струни знехтувати) (рис. 6.10.2). Чисельні дані задачі: $l = 0,5$ м, $T_0 = 30$ Н, діаметр проволочки струни $d = 1$ мм, густина матеріалу (сталь) $\rho = 7800$ кг/м³.

Відповідь: $c = \sqrt{\frac{T_0}{m_0}} = 69 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, $\omega_i = \frac{\pi i}{l} \sqrt{\frac{T_0}{m_0}} = 434i$ ($i = 1, 2, \dots$).

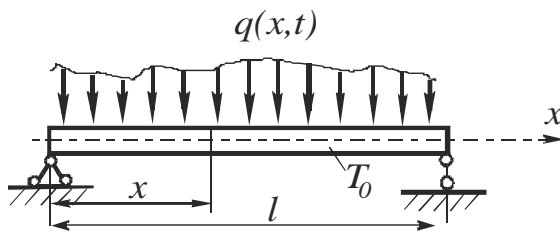


Рис. 6.10.1

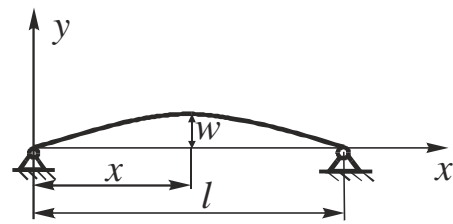


Рис. 6.10.2

6.10.3 Струна в початковий момент часу має відхилення виду $w = w_0 \sin \frac{\pi x}{l}$ (рис. 6.10.4). Швидкості в початковий момент часу дорівнюють нулю. Натяг струни T_0 . Визначити відхилення струни в наступні моменти часу.

Відповідь: $w(x,t) = w_0 \sin \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi \alpha t}{l}$, $\alpha^2 = \frac{T_0}{m_0}$.

6.10.4. Визначити перші дві власні частоти поперечних коливань струни, маса якої (маса одиниці довжини струни) змінюється за законом $m = m_0 + m_1 \sin \frac{\pi x}{l}$ (рис. 6.10.4). Враховуючи, що натяг струни T_0 при коливаннях залишається практично незмінним.

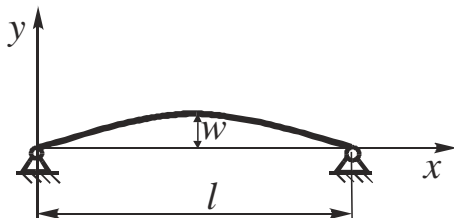
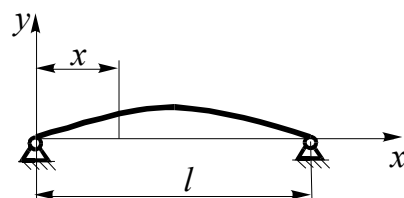


Рис. 6.10.4



$$\text{Відповідь: } \omega_1 = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{T_0}{m_0 \left(1 + \frac{8m_1}{3\pi m_0}\right)}}, \omega_2 = \frac{2\pi}{l} \sqrt{\frac{T_0}{m_0 \left(1 + \frac{32m_1}{15\pi m_0}\right)}}.$$

Задачі на крутильні коливання валів

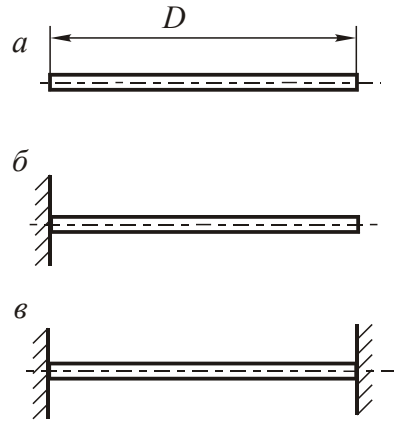


Рис. 6.10.6

6.10.5. Вивести диференціальне рівняння

вільних крутильних коливань суцільного валу круглого перерізу та визначити власні частоти коливань вала для випадків закріплення вала, як показано на рис. 6.10.6. Модуль пружності при зсуві матеріалу вала G , густина матеріалу ρ .

$$\text{Відповідь: а) } \omega_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right) \sqrt{\frac{G}{\rho}},$$

$$\text{б) } \omega_n = \left(\frac{2n-1}{2l}\right) \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \text{ в) } \omega_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right) \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (n=1, 2, \dots).$$

6.10.6. Визначити швидкість розповсюдження хвилі кручення (хвиль зсуву) по валу суцільного перерізу, якщо модуль пружності при зсуві $G = 80 \cdot 10^4$ МПа, густина матеріалу $\rho = 7800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

$$\text{Відповідь: } c = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = 3,2 \text{ км/с}.$$

6.10.7. Визначити швидкість розповсюдження хвилі кручення та власні частоти крутильних коливань пружини, якщо $l=20$ см, $D=10$ см, $d=0,5$ см, число витків $n=20$, модуль пружності при розтязі матеріалу дроту, з якого зроблена пружина, дорівнює $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, густина матеріалу $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$ (пружина має малий кут підйому).

$$\text{Відповідь: } c = \frac{ld}{2\pi n D^2} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 4,1 \text{ м/с}, \quad \omega_i = \left(\frac{2i-1}{2l} \right) \frac{dl}{2\pi n D^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (i=1,2,\dots).$$

Задачі на поздовжні коливання стержнів

6.10.8. Скласти диференційне рівняння поздовжніх коливань стержнів та визначити частоти коливань для випадків закріплення стержнів (рис. 6.10.6). Модуль пружності при розтязі матеріалу стержня E , його густина ρ , площа поперечного перерізу A . При складанні рівняння коливань стержня рахувати, що переріз залишається плоским, частинки стержня не здійснюють поперечних рухів та переміщуються тільки в поздовжньому напрямку.

$$\text{Відповідь: а) } \omega_n = (\pi n / l) \sqrt{\frac{EA}{m_0}}, \quad \text{б) } \omega_n = (2n-1) / (2l) \sqrt{\frac{EA}{m_0}},$$

$$\text{в) } \omega_n = \left(\frac{\pi n}{l} \right) \sqrt{\frac{EA}{m_0}}, \quad m_0 = \rho A.$$

6.10.9. Визначити швидкість розповсюдження хвиль стиску по стержню, якщо $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\rho = 7800$ кг/м³.

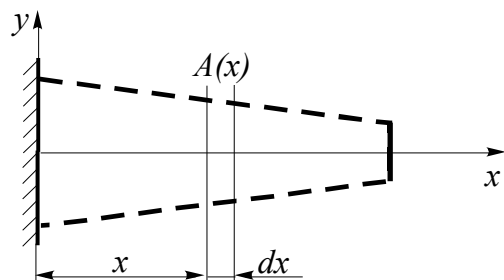
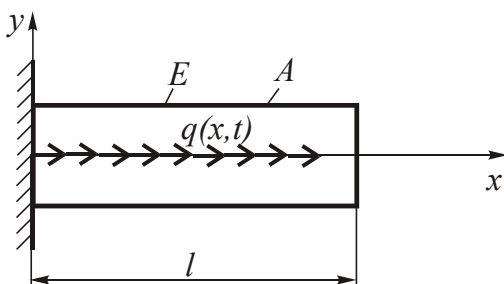
$$\text{Відповідь: } c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 5 \cdot 10^3 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

6.10.10. Скласти диференційне рівняння поздовжніх коливань стержня, навантаженого поздовжнім розподіленим навантаженням $q(x,t)$ (рис. 6.10.7).

$$\text{Відповідь: } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{q}{m_0}, \quad c = \sqrt{\frac{EA}{m_0}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

6.10.11. Скласти диференційне рівняння вільних поздовжніх коливань стержня в випадку змінної площі поперечного перерізу (рис. 6.10.8).

$$\text{Відповідь: } \rho A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[EA(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right].$$



6.10.12. Лівий край стержня зв'язаний з пружиною жорсткістю $c = \frac{EA}{l}$

(рис. 6.10.9). Вивести диференціальне рівняння для визначення власних частот коливань та графічним методом визначити три перші частоти малих вільних коливань стержня. Маса одиниці довжини стержня m_0 .

Відповідь: $\omega_1 = \frac{3}{8} \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{EA}{m_0}}$, $\omega_2 = \frac{9}{8} \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{EA}{m_0}}$, $\omega_3 = \frac{33}{16} \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{EA}{m_0}}$, де $m_0 = \rho A$.

6.10.13. Для випадку закріплення стержня, показаного на рис. 6.10.11, отримати рівняння частот та визначити перші дві власні частоти, якщо $c = \frac{EA}{l}$.

Відповідь: $\omega_1 = \frac{2}{3} \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{EA}{m_0}}$, $\omega_2 = \frac{3}{2} \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{EA}{m_0}}$.

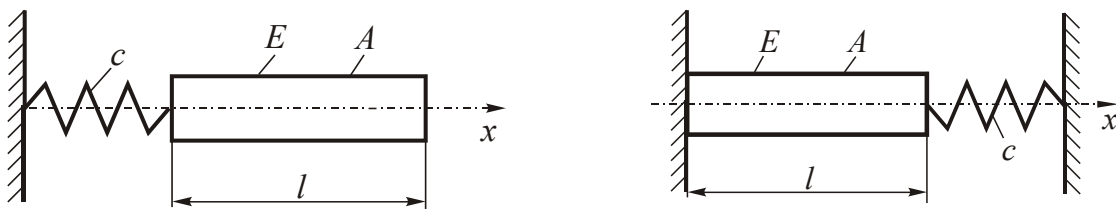


Рис. 6.10.11

6.10.14. Знайти закон коливань від раптово прикладеної до кінця ідеально пружного стержня осрової сили F , що раптово знімається (рис. 6.10.12).

Відповідь: $u(x,t) = F \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(l)u_n(x)}{M_n \omega_n^2} (1 - \cos \omega_n t)$.

6.10.15. Знайти безпосередній розв'язок задачі вимушених позовжніх коливань стержня (рис. 6.10.3).

Відповідь: $u(x,t) = \frac{Fc_0}{EA \cos \frac{p}{c_0} l} \sin \frac{p}{c_0} x \cos pt$,

де $\frac{p}{c_0} l \neq 0$, $p = \omega_n = \frac{(2n-1)\pi}{2l} c_0$.

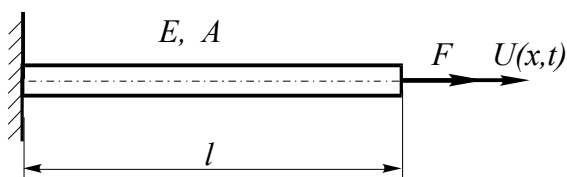


Рис. 6.10.12

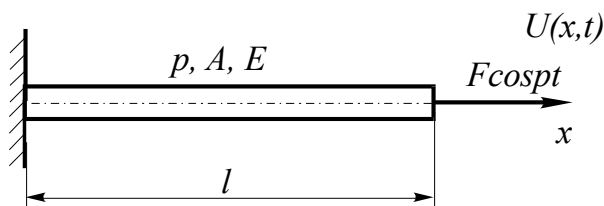


Рис. 6.10.13

Задачі на поперечні коливання балок

6.10.16. Скласти диференційне рівняння малих поперечних коливань балок та визначити власні частоти для випадків закріплення, показаних на рис. 6.10.14. Маса одиниці довжини стержня m_0 , згинна жорсткість EI_z .

Відповідь: а) $\omega_1 = 3,25 \sqrt{\frac{EI_z}{m_0 l^4}}$, $\omega_n = \frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4l^2} \sqrt{\frac{EI_z}{m_0 l^4}}$;

б) $\omega_1 = 16,4 \sqrt{\frac{EI_z}{m_0 l^4}}$, $\omega_n = \frac{(4n+1)^2 \pi^2}{16} \sqrt{\frac{EI_z}{m_0 l^4}}$.

6.10.17. Визначити власні частоти коливань балок для випадків, показаних на рис. 6.10.15.

Відповідь: а) $\omega_1 = 22,5 \sqrt{\frac{EI_z}{m_0 l^4}}$, $\omega_n = \left[\frac{2(n+1)+1}{2} \right]^2 \pi^2 \sqrt{\frac{EI_z}{m_0 l^4}}$;

б) $\omega_1 = 5,5 \sqrt{\frac{EI_z}{m_0 l^4}}$, $\omega_n = \left(\frac{2n-1}{2} \right)^2 \pi^2 \sqrt{\frac{EI_z}{m_0 l^4}}$.

6.10.18. Показати, що у випадку змінного по довжині момента інерції $I_z(x)$ диференційне рівняння малих вільних коливань балки має вигляд

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI_z(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0.$$

3. ПЕРЕЛІК ПИТАНЬ ДЛЯ ПІДГОТОВКИ ТА ЗАКРІПЛЕННЯ ЛЕКЦІЙНОГО МАТЕРІАЛУ ТЕСТОВІ ЗАПИТАННЯ

- 1.Класифікація систем з розподіленими параметрами. Матричне рівняння Ламе.
- 2.Виведення диференційного рівняння поздовжніх коливань стрижня.
- 3.Операторне представлення диференційного рівняння поздовжніх коливань стрижня.
- 4.Властивості операторів рівняння вільних поздовжніх коливань стрижня.
- 5.Властивості власних частот і власних форм поздовжніх коливань стрижня.
- 6.Доведення умов ортогональності власних форм поздовжніх коливань стрижня і формул зведення.
- 7.Хвильове рівняння і його розв'язування у випадку, коли обидва кінці стрижня вільні для поздовжніх переміщень.
- 8.Розв'язування хвильового рівняння у випадку, коли обидва ці стрижня закріплені.
- 9.Розв'язування хвильового рівняння у випадку, коли один кінець стрижня закріплений, а другий вільний.
- 10.Неоднорідні граничні умови при поздовжніх коливаннях стрижня.
- 11.Визначення власних частот і власних форм коливань стрижня постійного перерізу при неоднорідних граничних умовах.
- 12.Виведення умов ортогональності та формул зведення при неоднорідних граничних умовах при поздовжніх коливаннях стрижня.
- 13.Розв'язування хвильового рівняння методом Д'Аламбера. Фізичний зміст розв'язку.
- 14.Зв'язок між розв'язками Д'Аламбера і Фур'є для хвильового рівняння.
- 15.Синусоїдальна хвиля. Довжина хвилі, її залежність від хвильового числа.
- 16.Вільні поздовжні коливання з урахуванням в'язкого тертя. Розв'язування МГК. Характер коливань.
- 17.Вимушені поздовжні коливання ідеально пружного стрижня. Розв'язування МГК. Вимушуюча сила довільна, гармонічна.
- 18.Вимушені поздовжні коливання під дією розподіленої гармонічної сили при наявності в'язкого тертя. Частотна передаточна функція.
- 19.Кінематичне збудження поздовжніх коливань стрижня.
- 20.Вимушені стаціонарні випадкові поздовжні коливання стрижня.
- 21.Метод початкових параметрів для поздовжніх коливань у глобальній системі координат.
- 23.Метод початкових параметрів для поздовжніх коливань у формі Коші.
- 24.Метод початкових параметрів у матричному вигляді при поздовжніх коливаннях стрижня.
- 25.Крутильні коливання круглого стрижня.
- 26.Виведення диференційного рівняння поперечних коливань струни.